Vivenda

Situación de aprendizaxe 3. O artigo 47 da Constitución de 1978 recolle que «Todos os españois teñen dereito a gozar dunha vivenda digna e axeitada». Engade ademais, que «os poderes públicos promoverán as condición necesarias e estabelecerán as normas pertinentes para faceren efectivo este dereito, regulando a utilización do solo de acordo co interese xeral para que se impida a especulación».

Pero o certo é que a vivenda converteuse nun dos problemas que máis preocupa á cidadanía (o segundo entre as persoas menores de 35 anos, segundo o CIS). A falta de vivendas a un prezo accesíbel é unha das causas que impide a emancipación da xente nova, a pesar de ter traballo.

O obxectivo desta situación de aprendizaxe é reflexionar sobre distintas problemáticas relacionadas coa vivenda. Como reto final debe evidenciarse un produto final: construción dun texto, a partir da resolución das distintas tarefas e cos est’ımulos presentados, para facer unha proposta de resolución do problema da vivenda para a xente moza.

Imaxe de fondo obtida de https:www.freepik.com

Estímulo 3.1: O paradoxo da Vivenda: necesidade versus especulación.

O debate sobre a vivenda sempre estivo marcado por unha tensión constante entre a intervención do sector público e a libre operación do mercado inmobiliario. Este dilema está presente dende hai décadas e intensificouse nun contexto onde as crises económicas deixaron parte da cidadanía en situación de vulnerabilidade. Por iso, a relación entre o dereito á vivenda e os intereses especulativos provoca un panorama complexo, que require dunha análise profunda e dun enfoque renovado e disruptivo.

O artigo 47 da Constitución de 1978 estabelece un dereito fundamental: «Todos os españois teñen dereito a disfrutar dunha vivenda digna e adecuada. Os poderes públicos promoverán as condicións necesarias e establecerán as normas pertinentes para facer efectivo este dereito, regulando a utilización do solo de acordo co interese xeral para impedir a especulación».

Esta declaración non só representa un compromiso social, senón que lles impón unha clara responsabilidade aos poderes públicos para crearen as condicións necesarias que garantan este dereito. Non obstante, a realidade demostrou ser moi diferente. A especulación domina o sector inmobiliario e eclipsa as febles políticas públicas necesarias para lograr unha vivenda accesible e digna para todas as persoas.

A especulación inmobiliaria conduce ás familias a destinar máis do 50 % dos seus ingresos ao acceso a unha vivenda. é unha cifra alarmante que contrasta drasticamente co 20 ou 25 %, que se observa noutras economías europeas. Este fenómeno xera, ademais, un impacto devastador na estabilidade económica dos fogares, ao deixalos atrapados nunha espiral de endebedamento que complica aínda máis a súa calidade de vida. A carga económica da vivenda contribuíu ao aumento da desigualdade social e atinxiu principalmente aos grupos máis vulnerables.

Esta nova crise inmobiliaria está marcada polos incrementos nos prezos do acceso á vivenda, que non concordan coas subas dos salarios. ábrese, pois, un novo horizonte que podería permitirnos reformular este paradoxo, xa que as prácticas económicas no ámbito inmobiliario construíron un modelo totalmente anómalo, a resultas do cal se produce unha falta de oferta alcanzable para a meirande parte da poboación.

Ademais, o desenvolvemento e a transformación urbana, no canto de contribuíren a unha oferta de vivenda equilibrada consonte coa capacidade económica da poboación, provocan unha distorsión dos prezos e, polo tanto, unha crecente desconexión entre a calidade das vivendas e os niveis de renda da cidadanía. Créanse, así, contornas onde a procura de beneficios económicos a curto prazo prima sobre a necesidade dun desenvolvemento urbano sostible e accesible. Increméntase, paradoxalmente, a oferta de vivendas de luxo de alto custo en certas cidades, mentres que as opcións asequibles e de calidade se volven cada vez máis escasas.

Este modelo anómalo provoca, evidentemente, graves desigualdades sociais, porque as familias de baixos e medianos ingresos se ven forzadas a destinaren unha porcentaxe desproporcionada dos seus ingresos a adquirir un espazo onde poder habitar. Limítase, deste xeito, a súa capacidade para cubrir outras necesidades básicas, como poden ser a alimentación, a educación, a saúde, ou o ocio. Provoca, xa que logo, unha fragmentación social.

Este modelo anómalo, en lugar de ofrecer opcións que se axusten aos ingresos da maioria da poboación, prioriza a rendibilidade sobre a accesibilidade. Incrementa o endebedamento das persoas e xera un sentimento de frustración e de desconfianza cara ás institucións e cara ao propio sistema. Daquela, é preciso rematar con anos de especulación e construír un medio urbano máis equitativo e accesible para todas as persoas con enfoques innovadores e disruptivos que promovan unha visión máis xusta e sostible da vivenda. A transformación do sector debe centrarse no benestar da cidadanía e priorizar o acceso a unha vivenda asequible como un dereito fundamental, tal e como recolle a propia Constitución.

Para iso, cómpre fomentar, entre outras liñas de acción, unha maior oferta de vivenda pública en alugueiro; unha maior colaboración co sector privado non especulativo, como son as cooperativas; así como, outras novas iniciativas que procuren o benestar social en lugar do lucro. Requírese, ademais, unha mellora significativa na eficiencia da administración pública na xestión do solo e mais nos procesos de rehabilitación de vivendas existentes. A recuperación e a reciclaxe de edificacións deben ser tamén unha prioridade, para contribuír non só á sustentabilidade do medio urbano e rural, senón tamén como fórmula de recuperación e posta en valor do patrimonio arquitectónico.

é fundamental, ademais, que as políticas de vivenda do século XXI se proxecten con base en criterios de sustentabilidade, isto é, de eficiencia enerxética. O sector da construción é o responsable de arredor do 35 % das emisións de CO_2 en Europa, o que subliña a necesidade dunha transformación profunda deste sector.

O novo paradigma debe adoptar prácticas construtivas sostibles, co uso de materiais ecoeficientes, que son cruciais para reducir o impacto ambiental e para fomentar un desenvolvemento responsable. é tamén esencial que as vivendas se adapten aos novos modos de vida e de traballo, que a tecnoloxía nos permite hoxe en día, así como ás transformacións na estrutura familiar, que é máis diversa e complexa.

A rehabilitación debe converterse nun dos vectores principais das políticas de vivenda. Non só se trata de mellorar a calidade das edificacións existentes, senón tamén de revitalizar comunidades enteiras, co fomento da cohesión social e coa mellora da calidade de vida de quen as habita. A rehabilitación pode contribuír á rexeneración urbana, ao transformar espazos degradados en contornas habitables e agradables.

Trátase tamén de ir máis aló do simple acceso ao espazo privativo da vivenda, pois o enfoque debe ser máis holístico e considerar o benestar da sociedade no seu conxunto. Así mesmo, a relación que a vivenda privada estableza co territorio que habita deberá ser tamén de moita calidade, co fin de xerar espazos colectivos e de interacción. Este concepto implica unha transformación profunda na maneira en que entendemos e abordamos o desenvolvemento urbano e a edificación. A habitabilidade debe incluír, así mesmo, outros factores, como a accesibilidade ao transporte público, a proximidade de parques e espazos verdes ou a dispoñibilidade de servizos, como educación, saúde ou comercio.

Débese facer tamén unha reflexión diferente sobre como usamos e definimos o territorio. Iso implica recoñecer a interconexión entre os espazos construídos e os espazos naturais. Daquela, os novos modelos das políticas de vivenda deben ter en conta a planificación territorial, para fomentar a conservación da biodiversidade e dos ecosistemas e para promover, así, unha relación harmónica entre o ser humano e o seu medio. Isto inclúe a creación de corredores verdes, a preservación de áreas naturais ou a implementación de prácticas que fomenten a agricultura urbana.

En resumo, este enfoque disruptivo implica un cambio absoluto de paradigma na forma en que concibimos o desenvolvemento urbano e a edificación, xa que non se trata só de construír vivendas, senón de crearmos contornas que promovan a sustentabilidade medioambiental e a cohesión social.

Preséntase fronte a nós unha oportunidade histórica para reverter o dano inflixido á economía da cidadanía e para poñer fin á especulación no sector inmobiliario. A gobernanza debe ser capaz de xerar propostas avanzadas que consideren os límites ecolóxicos e que promovan un modelo urbanístico renovado.

é hora de repensar a nosa relación coa vivenda, e de lembrarmos que esta é máis que un simple ben económico, é un dereito fundamental que debe ser garantido polo Estado.

Reinventar o futuro da vivenda implica un compromiso colectivo para construír unha contorna máis xusta, sostible e accesible para todas as persoas. O que significa, que debemos abordar a crise da vivenda, non só desde unha perspectiva económica, senón tamén debemos considerar as súas implicacións sociais, culturais e medioambientais. Cómpre ter en conta tamén a participación da cidadanía na toma de decisións sobre políticas de vivenda, pois é esencial para garantir que as solucións adoptadas responden ás necesidades reais da poboación.

A vivenda debe ser entendida como un elemento central na construción de sociedades máis equitativas e sostibles. As políticas deben priorizar o acceso á vivenda, na consideración de que esta é un ben de uso e non de consumo. Non só mellorará a calidade de vida da cidadanía, senón que tamén contribuirá ao desenvolvemento dun medio urbano que respecte o benestar social e a saúde do planeta. É o momento de actuar con determinación e responsabilidade, e de asegurar que o dereito á vivenda se convirta nunha realidade.

Texto de **Teresa Táboas Veleiro**, doutora arquitecta. Vicepresidenta R1 do Consello da Unión Internacional de Arquitectos (UIA).

Estímulo 3.2: Viñeta de Xosé Lois González Vázquez, "o Carrabouxo", publicada no xornal *La Región*

https://carrabouxo.es/2023/12/26/carra23-12-23/

Estímulo 3.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, "o Bichero", publicada no xornal *Faro de Vigo*

https://www.facebook.com/photo.php?fbid=977195437100954

Tarefa 3.1. Tempo estimado para a resolución: 60'. Segundo o CIS (Centro de Investigacións Sociolóxicas) no ano 2023, o 75% dos fogares son vivendas en propiedade, o dato máis baixo da serie histórica, e o resto son vivendas en alugueiro (desprezamos o dato doutras modalidades), tal e como recollen os estímulos 3.1, 3.2 e 3.3.

Das vivendas en propiedade, o 29% pertencen a xoves entre 18 e 35 anos, mentres que das vivendas en alugueiro o 50% están alugadas por xoves entre 18 e 35 anos.

1. O Goberno está a deseñar unha axuda ao alugueiro para xoves entre 18 e 35 anos. Que porcentaxe de persoas serían posíbeis receptoras das axudas?
2. Estuda se existe unha relación de dependencia entre os sucesos «vivenda en aluguer» e «ser xove entre 18 e 35 anos» sabendo que o 22% da poboación pertence a esa franxa de idade.

Segundo un portal inmobiliario de referencia o alugueiro dun piso de 85 m^2 por termo medio é de 800€. Considéranse infravivendas aquelas que non reúnen as condicións mínimas de habitabilidade, e son o 8% das vivendas cun prezo de alugueiro máis barato. Se asumimos que o prezo do alugueiro dos pisos de 85 m^2 segue unha distribución normal,

3. Cal debe ser o prezo máximo dunha vivenda para pertencer á categoría de infravivenda, se sabemos que o 28,10% dos alugueres son menores que 600€?

Existen dous tipos de vivendas: de promoción privada, cando é unha empresa privada a que executa a obra e vende as vivendas a prezo de mercado, e as de promoción pública ou vivenda protexida, cando é o Estado ou o Goberno autonómico o que constrúe para vender ou alugar a colectivos con niveis de renda máis baixo ou a xoves. España é un dos países da Unión Europea con menos porcentaxe de vivenda pública: só o 2,5% do total de vivenda construída é pública, fronte a Países Baixos ou Austria onde esta porcentaxe é do 30% e 24%, respectivamente.

4. Se tomamos 10 vivendas ao azar das construídas en España no último ano, cal é a probabilidade de que polo menos 3 sexan de promoción pública?
5. Se consideramos as 3.500 vivendas construídas no último ano en Galiza, cal é a probabilidade de que exactamente 80 sexan de promoción pública? e de que sexan máis ou igual que 100 e menos de 300?

Solución. **(1)** Denotemos

- A = «a vivenda está ocupada en aluguer».
- $\bar{A}$ = «a vivenda está ocupada pola propiedade».
- M = «a persoa que vive na casa ten entre 18 e 35 anos».

Xa que logo, dos datos que aparecen no enunciado temos que

$$P(A) = 0{,}25, \quad P(\bar{A}) = 0{,}75, \quad P(M/\bar{A}) = 0{,}29, \quad P(M/A) = 0{,}50. \tag{3.1}$$

Entón, calculamos a probabilidade das vivendas en alugueiro nas que reside unha persoa entre 18 e 35 anos

$$P(A \cap M) = P(M/A) \cdot P(A) = 0{,}50 \cdot 0{,}25 = 0{,}125. \tag{3.2}$$

Xa que logo, un 12,5% da poboación sería posíbel receptora das axudas.

(2) A condición para que A e M sexan independentes é equivalente a

$$P(A \cap M) = P(A)\, P(M). \tag{3.3}$$

Temos que

$$P(A) = 0{,}25, \quad P(M) = 0{,}22 \qquad\qquad P(A)\, P(M) = 0{,}25 \ \cdot\ 0{,}22 = 0{,}055. \tag{3.4}$$

Posto que os valores son diferentes ($0{,}125 \neq 0{,}055$) temos que non son sucesos independentes, é dicir, existe unha relación de dependencia entre ambos sucesos.

(3) Denotemos agora

- X = «prezo alugueres de vivendas de 85 m^2», que segue unha distribución normal N(800;σ).
- M = «prezo máximo das infravivendas».

Para calcular

$$P(X \leq M) = 0{,}08 \tag{3.5}$$

necesitamos calcular σ. Posto que sabemos que

$$P(X < 600) = 0{,}2810 \tag{3.6}$$

temos entón que

$$P\left(Z \leq \frac{600-800}{\sigma}\right) = 0{,}2810. \tag{3.7}$$

Xa que

$$1 - 0{,}2810 = 0{,}7190, \tag{3.8}$$

na táboa da distribución normal N(0;1) a 0,7190 lle corresponde 0,58, é dicir

$$\frac{600-800}{\sigma} = -0{,}58, \tag{3.9}$$

de onde finalmente deducimos que

$$\sigma = 344{,}83. \tag{3.10}$$

Agora xa podemos empregar que

$$P\left(X \leq \frac{M-800}{344{,}83}\right) = 0{,}08 \tag{3.11}$$

de onde

$$\frac{M-800}{344{,}83} = \text{-}1{,}42 \tag{3.12}$$

que implica que

$$M = 310{,}34 \text{ €}. \tag{3.13}$$

As vivendas de 85 m^2 cun prezo de alugueiro menor ou igual a 310,34€ non reúnen as condicións de habitabilidade.

(4) Empregamos agora a notación X = «número de vivendas de promoción pública das dez» que podemos aproximar por unha distribución binomial B(10; 0,025). Temos

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} 0{,}025^0\, 0{,}975^{10} + \binom{10}{1} 0{,}025^1\, 0{,}975^9 + \binom{10}{2} 0{,}025^2\, 0{,}975^8\right] \\ &\approx 1 - [0{,}78 + 0{,}20 + 0{,}02] = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

(5) Agora denotamos X = «número de vivendas de promoción pública das 3.500» que segue unha distribución binomial B(3.500; 0,025). Posto que

$$n = 3.500 \geq 30, \qquad np = 87{,}5 > 5, \qquad nq = 3.412{,}5 > 5, \tag{3.15}$$

aproximamos a binomial B(3.500; 0,025) por unha distribución normal onde

$$\mu = np = 87{,}5, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 9{,}24. \tag{3.16}$$

Empregamos a aproximación de Yates para calcular

$$P(X = 80) \approx P(79{,}5 < X' \leq 80{,}5) = P(-0{,}87 < Z \leq -0{,}76), \tag{3.17}$$

onde agora empregamos a propiedade de simetría para continuar

$$\begin{aligned} P(X = 80) &\approx P(0{,}76 < Z \leq 0{,}87) \\ &= P(Z \leq 0{,}87) - P(Z \leq 0{,}76) = 0{,}8078 - 0{,}7764 = 0{,}0314. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Calculamos empregando as mesmas ideas

$$\begin{aligned} P(100 \leq X < 300) &\approx P(99{,}5 < X' \leq 299{,}5) = P(1{,}30 < Z \leq 9{,}24) \\ &= P(Z \leq 9{,}24) - P(Z \leq 1{,}30) = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968. \end{aligned} \tag{3.19}$$

□

Tarefa 3.2. Tempo estimado para a resolución: 40’. Unha das causas do alto prezo das vivendas é que a cantidade de vivendas novas que se constrúen e o número de fogares novos que se crean vai cada vez máis descompasado, como se mostra no gráfico da esquerda:

O gráfico da dereita mostra o número de vivendas en miles que se construíron desde 2016 (tomamos 2016=0) ata o ano 2023. Podemos aproximar a función que expresa o número de vivendas construídas en función do ano mediante

$$f(x) = 0{,}07\,x^3 - 1{,}89\,x^2 + 15{,}13x + 47{,}75. \tag{3.20}$$

1. Calcula os intervalos de crecemento e de decrecemento do número de vivendas que se constrúen entre o ano 0 (2016) e ata o ano 15 (2031), de seguir co mesmo comportamento a construción de vivendas.
2. En que anos se atinxe os números máximo e mínimo de vivendas construídas nese mesmo intervalo de tempo e cantas vivendas serían?
3. Cres que o número de vivendas construídas anualmente tende a estabilizarse en algún valor?
4. Determina o promedio esperado de vivendas construídas anualmente no período entre 2016 e 2031, sabendo que o promedio dunha función $f(x)$ nun intervalo $[a, b]$ vén dado por
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{3.21}$$

Solución. **(1)** A función $f(x)$ dada na ecuación (3.20) é de tipo polinomial, polo que é continua e derivábel en toda a recta real. Ademais,

$$f'(x) = 0{,}21x^2 - 3{,}78x + 15{,}13, \tag{3.22}$$

de onde temos que os posíbeis extremos relativos de f son os valores onde se anula a súa derivada, para o que resolvemos

$$0{,}21x^2 - 3{,}78x + 15{,}13 = 0, \tag{3.23}$$

con solucións

$$x_1 = 6{,}00795, \quad x_2 = 11{,}9921. \tag{3.24}$$

Se analizamos o signo da derivada primeira antes e despois destes dous valores, temos que no intervalo $(0, x_1)$ a función $f'(x)$ é positiva, polo que a función f é crecente. No intervalo (x_1, x_2) a función $f'(x)$ é negativa, polo que a función f é decrecente. Finalmente, para valores maiores que x_2 a función $f'(x)$ volve a ser positiva, polo que novamente f é crecente. Podemos afirmar entón que a construción de vivendas aumenta desde 2016 ata o ano 2022 e a partir de 2028, mentres que diminúe entre 2022 e 2028.

(2) Para determinar se son realmente extremos e, no caso de ser extremos que tipo de extremos son, podemos ou ben analizar o signo da derivada primeira antes e despois de cada un dos posíbeis extremos, ou ben analizar o signo da derivada segunda neses puntos. No primeiro caso, xa temos a análise feita no apartado anterior, polo que podemos deducir que ten dous extremos relativos: un máximo relativo no punto $x_1 = 6{,}00795$ e un mínimo relativo no punto $x_2 = 11{,}9921$.

Se optamos pola segunda opción (análise da derivada segunda) temos que

$$f''(x) = 0{,}42x - 3{,}78, \qquad f''(x_1) = -1{,}25666, \quad f''(x_2) = 1{,}25666. \tag{3.25}$$

Xa que logo, obtemos novamente que a función f presenta un máximo relativo no punto $x_1 = 6{,}00795$ e un mínimo relativo no punto $x_2 = 11{,}9921$.

Agora ben, posto que o cálculo diferencial só fai a análise nos puntos dos intervalos abertos, quedan por analizar os puntos $x_0 = 0$ e $x_3 = 15$. Se calculamos os valores, temos

$$f(x_0) = 47{,}75, \quad f(x_1) = 85{,}61, \quad f(x_2) = 78{,}11, \quad f(x_3) = 85{,}7. \tag{3.26}$$

En consecuencia, podemos afirmar que o mínimo (absoluto) de vivendas construídas produciuse no ano 2016 e foi de 47,75 × 1.000=47.750 vivendas, mentres que se espera que o máximo absoluto de vivendas construídas será algo máis tarde do ano 2013+13 e será de 85,7×1.000=85.700 vivendas.

(3) Calculamos o límite da función $f(x)$ cando $x \to +\infty$ que resulta ser (máis) infinito ao ser unha función polinomial de terceiro grao con coeficiente principal positivo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 0{,}07\,x^3 - 1{,}89\,x^2 + 15{,}13x + 47{,}75 = +\infty. \tag{3.27}$$

Polo tanto, con este modelo, o número de vivendas construídas anualmente medraría sen límite.

(4) Temos que calcular

$$\frac{1}{15}\int_0^{15} f(x)dx = \frac{1}{15}\left[0.0175x^4 - 0.63x^3 + 7.565x^2 + 47.75x\Big|_0^{15}\right] = 78{,}5375. \tag{3.28}$$

Polo tanto, o promedio de vivendas construídas anualmente será de 78.538 vivendas. □

Tarefa 3.3. Tempo estimado para a resolución: 50'. Os concellos teñen competencias para limitar o número de metros cadrados de construción en relación coas dimensións da parcela. Esta relación chámase coeficiente de edificabilidade e pode variar incluso dentro do mesmo concello, en función da cualificación da parcela no PXOM (Plan xeral de ordenación municipal).

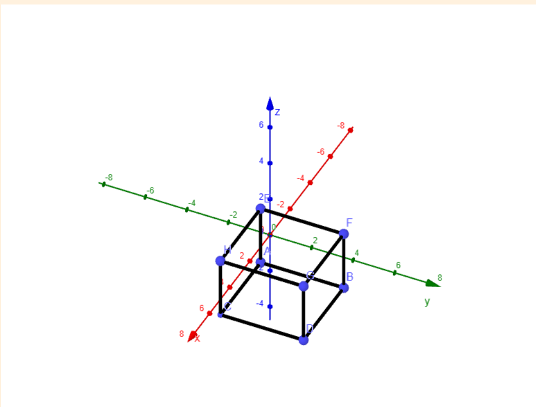
A promotora inmobiliaria GALINOVA proxecta construír un bloque de vivendas no teu concello nunha parcela onde o coeficiente de edificabilidade é de 6,15, é dicir, por cada m^2 de parcela pódense construír 6,15m^2 de edificación.

A promotora quere construír un soto para garaxes, un baixo para locais comerciais e 5 andares de vivendas.

No proxecto contémplase revestir a fachada dunhas pranchas ignífugas, para minimizar o risco de propagación do lume, xa que non últimos meses varias edificacións sufriron accidentes deste tipo con resultado de morte. O prezo das pranchas é de 100€/m^2. A forma e a situación do bloque nun sistema de referencia tridimensional é o da figura, onde

$$A = (3, 1, 1), \quad B = (3, 5, 1), \quad C = (7, 1, 1), \quad E = (3, 1, 4),$$

e as coordenadas corresponden a decenas de metros.



1. Canto debe medir como mínimo a parcela para respectar as normas urbanísticas do concello e poder obter licencia de construción?

2. Cal é a razón entre volume de obra construída e m^2 da parcela?

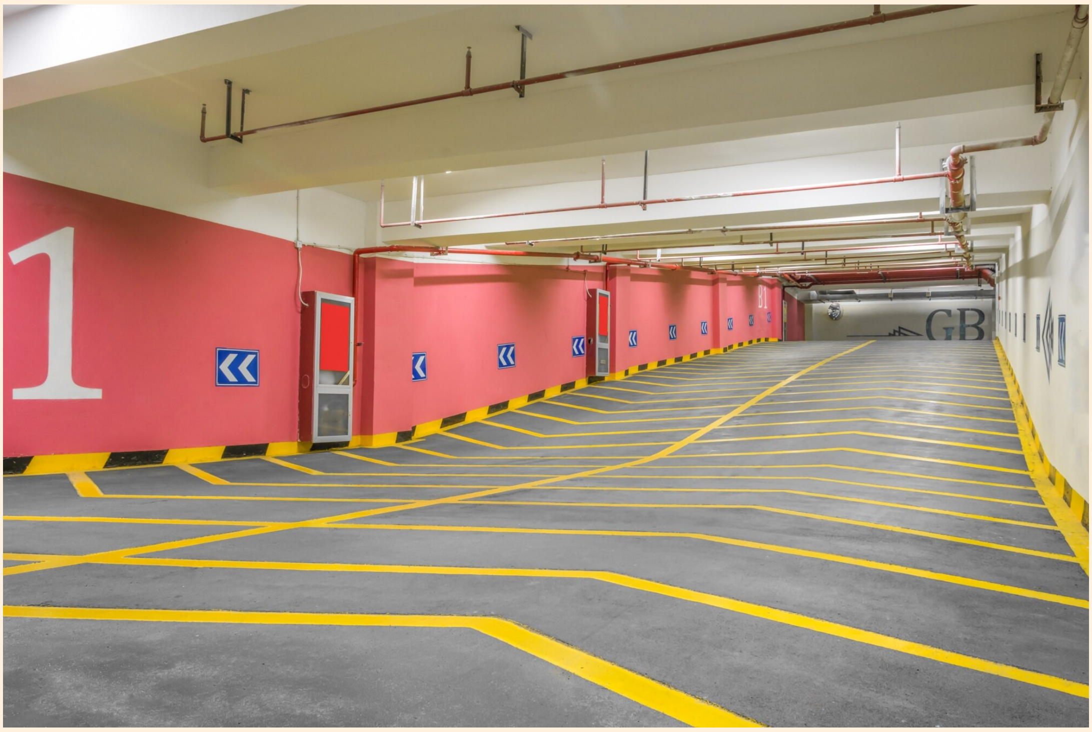
3. A empresa quere reformular o proxecto cambiando as medidas das fachadas mantendo constante o volume da edificación para que o coste dos paneis ignífugos da fachada sexa o menor posíbel. Polas dimensións dos paneis, a planta do edificio debe ser cadrada. Ademais, mercarán a maiores tantos paneis como a metade da superficie da base do edificio, para repoñer en caso de deterioro ou de obras. Cales deberían ser as dimensións do edificio nese caso?

4. Cal sería o custo dos paneis da fachada?

5. Outra das limitacións que ten o equipo que elabora o proxecto é que a rampa de baixada aos garaxes non supere o 18% de pendente, para que sexa accesíbel para peóns e non se deterioren os baixos dos coches. Consonte os seus cálculos a rampa tería de ecuación

$$x + 5z + 2 = 0, \tag{3.29}$$

pero non están seguros de que non se sobrepase a pendente do 18%. Poderías axudalos empregando Geogebra? Poderías axudalos sen empregar Geogebra?



Imaxe obtida de https:www.freepik.com

Solución. **(1)** Determinamos os vectores

$$\overrightarrow{AB} = (0,4,0), \qquad \overrightarrow{AC} = (4,0,0). \tag{3.30}$$

Xa que logo,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-16). \tag{3.31}$$

O módulo do vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é 16, polo que temos entón 1.600 m^2 de superficie de paralelogramo que forma a base de cada andar.

Posto que temos 1 soto, 1 baixo e 5 andares de vivendas, resulta un total de 7 plantas, de xeito que

$$7 \times 1.600 = 11.200\text{m}^2 \text{ de obra construída.} \tag{3.32}$$

Xa que o coeficiente de edificabilidade é de 6,15 formulamos

$$\frac{6{,}15 \text{ m}^2 \text{ construción}}{1 \text{ m}^2 \text{ de parcela}} = \frac{11.200\text{m}^2}{x} \tag{3.33}$$

de onde resulta que

$$x = \frac{11.200}{6{,}15} = 1.821{,}13 \text{ m}^2 \tag{3.34}$$

necesarios de parcela para obter a licenza municipal.

(2) Calculamos o volume do paralelepípedo

$$\text{Volume} = |\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right]| = |\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}| = |-48\text{u}^3| = 48\text{u}^3. \tag{3.35}$$

En consecuencia

$$\text{Volume} = 48.000\text{m}^3. \tag{3.36}$$

Unha vez calculado o volume de obra construída, a razón pedida é

$$\frac{48.000}{1.821} = \frac{16.000}{607} \tag{3.37}$$

(3) Temos que

$$\text{Volume} = 48.000\text{m}^3 = x^2\, y, \tag{3.38}$$

de onde

$$y = \frac{48.000}{x^2} \tag{3.39}$$

Temos que minimizar a función

$$f(x, y) = 4xy + \frac{x^2}{2} = 4x\frac{48.000}{x^2} + \frac{x^2}{2} = \frac{192.000}{x} + \frac{x^2}{2}. \tag{3.40}$$

Consideramos entón a función obxectivo que minimizar

$$g(x) = \frac{192.000}{x} + \frac{x^2}{2}, \qquad x \neq 0. \tag{3.41}$$

Se derivamos a función obxectivo resulta

$$g'(x) = -\frac{192.000}{x^2} + x, \tag{3.42}$$

de xeito que os posíbeis extremos de g son os puntos onde se anula a súa derivada,

$$-\frac{192.000}{x^2} + x = 0, \tag{3.43}$$

de onde resulta

$$x = \sqrt[3]{192.000} = 57{,}69 \text{ m}. \tag{3.44}$$

Polo tanto,

$$y = 14{,}42 \text{ m}. \tag{3.45}$$

Podemos comprobar que é un mínimo estudando o signo de $g'(x)$ antes e despois do punto crítico ou analizando o signo da derivada segunda de g:

$$g''(x) = \frac{192.000}{x^3} + 1 \tag{3.46}$$

que resulta positivo no punto crítico, polo que temos un mínimo relativo.

(4) Finalmente, o custo dos paneis da fachada é

$$\left[4 \cdot 57{,}69 \cdot 14{,}42 + \frac{(57{,}69)^2}{2}\right] 100 = 499.162{,}73 \text{ €}. \tag{3.47}$$

(5) Resolvemos manualmente a tarefa, sen empregar Geogebra. O vector normal ao plano da rampa é

$$\vec{n}_1 = (1, 0, 5). \tag{3.48}$$

Podemos calcular o plano da planta do edificio mediante

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.49}$$

de onde resulta o plano

$$-16x + 16 = 0, \tag{3.50}$$

con vector normal

$$\vec{n}_2 = (0, 0, -16). \tag{3.51}$$

Calculamos agora o ángulo α entre os dous vectores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ mediante

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \frac{80}{16\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} = 0{,}980581. \tag{3.52}$$

Polo tanto, o ángulo α é de 11,48 graos, ou de 0,197396 radiáns. Finalmente, posto que

$$\tan\alpha = \tan\left(\operatorname{arccos}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)\right) = \frac{1}{5} = 0{,}20, \tag{3.53}$$

temos que a pendente é do 20%, que supera o proxectado. □

Tarefa 3.4. Tempo estimado para a resolución: 30'. Para fixar o prezo das vivendas a construtora GALINOVA analiza a facturación que declara outra empresa do sector, INMOGAL, pola venda de tres bloques de vivendas construídos na mesma zona. Vendéronse tres tipos de vivendas: familiar (95m^2), estándar (80m^2) e óptima(50m^2). Os datos móstranse na seguinte táboa:

	Familiar	Estándar	Óptima	Facturación total
Bloque 1	12	18	20	12.050.000 €
Bloque 2	7	8	10	6.050.000 €
Bloque 3	5	10	10	6.000.000 €

1. Calcula a partir dos datos anteriores, se é posíbel, o prezo de cada un dos tipos de vivenda. É única a solución?

2. Se GALINOVA pescuda por unha persoa que mercou unha vivenda óptima nun dos bloques que o seu prezo foi de 212.500€, cal foi o prezo da vivenda familiar e da estándar?

Solución. **(1)** Sexan x, y e z os prezos das vivendas familiar, estándar e óptima, respectivamente. Segundo os datos que aparecen na táboa do enunciado podemos formular en primeiro lugar o sistema de ecuacións lineares:

$$\begin{cases} 12x + 18y + 20z = 12.050.000 \\ 7x + 8y + 10z = 6.050.000 \\ 5x + 10y + 10z = 6.000.000 \end{cases} \tag{3.54}$$

ou equivalentemente

$$AX = B, \tag{3.55}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 20 \\ 7 & 8 & 10 \\ 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12.050.000 \\ 6.050.000 \\ 6.000.000 \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

Realizamos operacións elementais na matriz $(A|B)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 18 & 20 & 12.050.000 \\ 7 & 8 & 10 & 6.050.000 \\ 5 & 10 & 10 & 6.000.000 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 6.050.000 \\ 5 & 10 & 10 & 6.000.000 \end{array}\right). \tag{3.57}$$

Polo tanto temos que o número de ecuacións é 2 mentres que o número de incógnitas é 3. Ademais, observando os rangos podemos afirmar que temos un sistema compatíbel intederminado, que ten infinitas solucións dadas por:

$$x = \alpha \in \mathbf{R}, \quad y = 25.000 - x, \quad z = 625.000 - \frac{3x}{2}, \tag{3.58}$$

ou ben mediante

$$x = \frac{2}{3}\left(625.000 - z\right), \quad y = \frac{2}{3}\left(z - 587.500\right), \quad z = \beta \in \mathbf{R}. \tag{3.59}$$

(2) Se agora sabemos que o prezo dunha vivenda de tipo óptima foi de 212.500 €, entón podemos calcular os valores das outras variábeis, quee resultan

$$x = 275.000€, \qquad y = 250.000€, \qquad (z = 212.500€). \tag{3.60}$$

□

Tarefa extra 3.1. Constrúe un texto sobre os problemas de vivenda no teu concello en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 3.2. A estabilidade no mercado inmobiliario é moi importante para garantir o mantemento dos prezos. Esta estabilidade baséase no valor positivo da diferenza do número de vivendas construídas cada ano e o número de vivendas construídas o ano anterior.

1. Tendo en conta o sinalado na ecuación (3.20) constrúe a función de estabilidade, $E(x)$ en miles de vivendas.
2. Representa graficamente a función de estabilidade no mercado, facendo o seu estudo.
3. Sabendo que o mercado é estábel se a diferenza de vivendas entre dous anos consecutivos non supera as 1.000 vivendas, analiza a estabilidade entre 2022 e 2023.
4. Consideras que o mercado se vai manter estábel nos vindeiros anos de seguir co ritmo de construción estimado?

Solución. **(1)** Da definición da función $f(x)$ na ecuación (3.20) temos

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= 0{,}07\,x^3 - 1{,}89\,x^2 + 15{,}13x + 47{,}75 \\ &\quad - \Big(0{,}07\,(x-1)^3 - 1{,}89\,(x-1)^2 + 15{,}13(x-1) + 47{,}75\Big) \\ &= 0{,}21x^2 - 3{,}99x + 17{,}09. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Posto que a diferenza pode ser positiva ou negativa temos que

$$E(x) = \left|0{,}21x^2 - 3{,}99x + 17{,}09\right|. \tag{3.62}$$

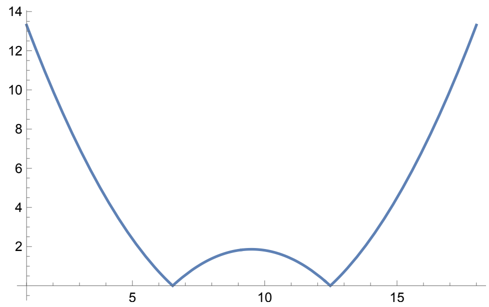
Para representar graficamente a función temos que determinar en primeiro lugar as raíces do polinomio de segundo grao para logo analizar o valor absoluto. Temos que

$$0{,}21x^2 - 3{,}99x + 17{,}09 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6{,}52191, \\ x_2 = 12{,}4781. \end{cases} \tag{3.63}$$

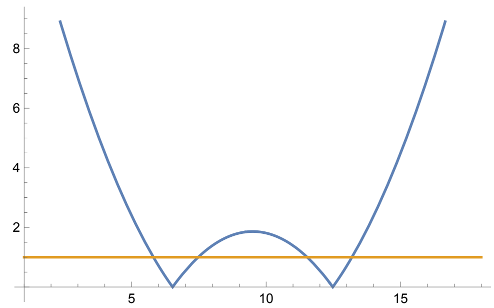
Analizamos o signo de $f(x) - f(x-1)$ nos intervalos $(-\infty, x_1)$, $)(x_1, x_2)$ e $(x_2, +\infty)$. No primeiro intervalo $f(x) - f(x-1)$ é positivo; no segundo negativo e no terceiro positivo novamente. Polo tanto,

$$E(x) = \begin{cases} 0{,}21x^2 - 3{,}99x + 17{,}09, & x \leq x_1 \approx 6{,}52, \\ -\left(0{,}21x^2 - 3{,}99x + 17{,}09\right), & x \in (x_1, x_2) \approx (6{,}52, 12{,}48), \\ 0{,}21x^2 - 3{,}99x + 17{,}09, & x \geq x_2 \approx 12{,}48. \end{cases} \tag{3.64}$$

A representación gráfica é entón



(2) Se representamos a función $E(x)$ xunto con $y = 1$ resulta



Na escala empregada o ano 2022 corresponde con $x = 6$ e o ano 2023 corresponde co ano $x = 7$ co cal temos que analizar se nese período a función $E(x)$ é menor que $y = 1$. Se resolvemos as interseccións de $E(x)$ con $y = 1$ resultan os puntos

$$x_1 = 5{,}80799, \quad x_2 = 7{,}47339, \quad x_3 = 11,5266, \quad x_4 = 13,192. \tag{3.65}$$

No intervalo (x_1, x_2) si que se verifica que $E(x) < 1$ polo que nese período de tempo houbo estabilidade.

(3) Á vista da gráfica anterior o esperado é nos vindeiros anos $E(x)$ terá valores maiores que 1.

$\square$

Tarefa extra 3.3. Unha persoa multipropietaria posúe un edificio enteiro de 80 pisos de 60 m^2, que ten en alugueiro a un prezo de 500€ mensuais cada un deles. Non contenta esta persoa cos 40.000€ de renda que ingresa mensualmente só por este edificio quere subir o prezo do alugueiro, pero observa que por cada 10€ de incremento no prezo perde unha familia inquilina. Cal é o prezo ao que lle convén arrendar os pisos para maximizar (aínda máis) os seus beneficios?

Solución. Denotaremos por x o número de familias inquilinas que perde. Entón, a función do beneficio en función de x vén dada por

$$f(x) = (80 - x)(500 + 10x). \tag{3.66}$$

Se derivamos e igualamos a cero obtemos un único punto crítico,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15. \tag{3.67}$$

Ademais, posto que $f''(x) = -20$ temos que nese punto hai un máximo relativo da función beneficio. É dicir, pode permitirse perder 35 familias que terán que buscar outro aloxamento, e alugando 65 dos seus pisos terá o maior beneficio mensual. Temos que

$$f(15) = 42.250€, \tag{3.68}$$

polo que esta persoa tería un beneficio un 5,6% maior incrementando os prezos dos alugueiros até chegar aos 650 € mensuais.

□

Tarefa extra 3.4. No alto do edificio, que está deseñado co teito plano e que nun sistema de coordenadas tridimensional ten por ecuación $z = 0$, instálanse paneis solares que seguen a ecuación

$$2x + 3y + 7z + 21 = 0, \qquad (3.69)$$

no mesmo sistema tridimensional.

Imaxe obtida de https://www.freepik.com

A certa hora do día a luz solar segue a traxectoria da recta que pasa polo punto $A(2, 1, -3)$ e ten por vector director $\vec{v}_\ell = (m, -2, 10)$. Aos efectos da produción de enerxía solar é moi importante o ángulo de inclinación das placas con respecto ao teito chairo do edificio. En Galiza a inclinación óptima para a produción de enerxía solar varía entre 20 e 40 graos, segundo a estación do ano.

1. Calcula os valores de m para que a luz do sol incida acaidamente sobre o panel solar.

2. Estuda se o teu panel está acaidamente orientado para facer un bo aproveitamento da luz solar.

Solución. **(1)** Definimos o plano π pola ecuación (3.69) e a recta r mediante

$$\begin{cases} x = m\lambda + 2, \\ y = -2\lambda + 1, \\ z = 10\lambda - 3, \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{3.70}$$

Estudamos a posición relativa da recta r mais o plano π, substituíndo a forma paramétrica da recta na ecuación do plano:

$$2(m\lambda + 2) + 3(-2\lambda + 1) + 7(10\lambda - 3) + 21 = \lambda(2m + 64) + 7 = 0, \tag{3.71}$$

de onde resulta

1. Se $m = -32$ entón queda $0 = -7$ polo que a luz solar e os paneis serían paralelos.

2. Se $m \neq -32$ entón os raios solares inciden no panel.

(2) Calculamos a inclinación do panel, que está no plano π respecto ao teito do edificio $z = 0$. O ángulo entre estes dous planos é o mesmo ángulo que o formado polos seus vectores normais $\vec{n}_\pi = (2, 3, 7)$ e $\vec{n}_z = (0, 0, 1)$.

$$\cos \angle(\vec{n}_\pi, \vec{n}_z) = \frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_z}{|\vec{n}_\pi|\,|\vec{n}_z|} = \frac{7}{\sqrt{62}} \approx 0{,}89. \tag{3.72}$$

Polo tanto,

$$\angle(\vec{n}_\pi, \vec{n}_z) = \arccos 0{,}89 \approx 27{,}2 \text{ graos}. \tag{3.73}$$

Xa que logo, o panel está correctamente colocado. □

Tarefa extra 3.5. Inspirada na Directiva INSPIRE (Infrastructure for Spatial Information in Europe) e ante a necesidade de organizar e poñer en común a información espacial das diferentes Infraestruturas de datos Espaciais dos Estados Membros, o IGE ten publicada a seguinte táboa a distribución de habitantes (en intervalos), número de cuadrículas de 1 km^2 (celas uniformes de 1 km de lado), e tamén a poboación total do número de cuadrículas de cada intervalo (datos do 2022) en Galiza.

Habitantes	Número de cuadrículas	% de cuadrículas	Poboación	% de Poboación
0 habitantes	11710	38,05	0	0
De 1 a 20	8532	27,70	78196	2,9
De 21 a 49	4743	15,41	154154	5,7
De 50 a 99	2656	8,63	184424	6,9
De 100 a 499	2418	7,86	503925	18,7
De 500 a 999	332	1,08	228369	8,5
De 1.000 a 2.499	218	0,71	346489	12,9
De 2.500 a 4.999	87	0,28	307430	11,4
De 5.000 a 9.999	44	0,14	301192	11,2
De 10.000 ou máis	36	0,12	586285	21,8
Total	30776	100	2690464	100

1. Define unha variábel aleatoria discreta que verifique que a súa esperanza represente a densidade[a] de poboación media por km^2 en Galiza.

2. Sempre se considera a Galiza como un país con moita dispersión de habitantes. Podes comprobalo? Podes empregar como referencia os datos do ano 2022 de Catalunya e Madrid: 246 e 853 h/km^2, respectivamente.

[a]Defínese densidade de poboación como a cantidade de persoas que habitan por unidade de superficie

Solución. Os datos da táboa están expresados en 1 km^2, polo que para obter a densidade media a unidade de referencia será a mesma. Sexa a variábel

$$D = \text{Valores de densidade de poboación por km}^2 \text{ en Galiza}, \tag{3.74}$$

Xa que valores de poboación da táboa que se indican veñen expresados en rangos, a variábel X tomará valores dados polo punto medio do intervalo agás o último (o que se coñece como marca de clase do intervalo). Deste xeito a función masa de probabilidade vén dada pola porcentaxe de cuadrículas sobre o total:

	0	1-20	21-49	50-99	100-499	500-999
d_i	0	10,5	35	74,5	295,5	749,5
$\tilde{d}_i$	0	9,17	32,50	69,43	208,41	687,86
p_i	0,3805	0,2772	0,1541	0,0863	0,0786	0,0108

	1000-2499	2500-4999	5000-9999	≥ 10000
d_i	1749,5	3749,5	7499,5	10000
$\tilde{d}_i$	1589,40	3533,68	6845,27	16285,69
p_i	0,0071	0,0028	0,0014	0,0012

A probabilidade de observar un Rango/d_i determinado será a de obter unha cuadrícula, así a $p_i = P(D = d_i)$ virá dada pola columna % cuadrículas.

Dado que a táboa tamén achega a columna Poboación para o total de habitantes dentro de cada rango, é preferíbel, no lugar da marca de clase (d_i), coller a población por número de cuadrículas dentro de cada rango, e dicir, definir

$$\tilde{d}_i = \frac{\text{Poboación Total}}{\text{Número cuadrículas}}. \tag{3.75}$$

que denotaremos pola variábel $\tilde{D}$.

En ambos casos a densidade promedio se calcularía mediante:

$$\mu_D = E(D) = \sum_{i=1}^{n} d_i \times p_i \tag{3.76}$$

obtendo valores de 91,47 e 87,64 habitantes por km^2, moi semellantes. Convén sinalar que o valor máis aproximado ao obtido sen agrupar os datos debería ser o de 87,64.

Habitantes	d_i	n°cuad	p_i	pob	$\tilde{d}_i$	$d_i \times p_i$	$\tilde{d}_i \times p_i$
0 habitantes	0	11710	0,3805	0	0,00	0	0,00
De 1 a 20	10,5	8532	0,2772	78196	9,17	2,91	2,54
De 21 a 49	35	4743	0,1541	154154	32,50	5,39	5,01
De 50 a 99	74,5	2656	0,0863	184424	69,44	6,43	5,99
De 100 a 499	295,5	2418	0,0786	503925	208,41	23,23	16,38
De 500 a 999	749,5	332	0,0108	228369	687,86	8,09	7,42
De 1.000 a 2.499	1749,5	218	0,0071	346489	1589,40	12,42	11,28
De 2.500 a 4.999	3749,5	87	0,0028	307430	3533,68	10,50	9,89
De 5.000 a 9.999	7499,5	44	0,0014	301192	6845,27	10,5	9,58
De 10.000 ou máis	10000	36	0,0012	586285	16285,69	12,00	19,54
Suma				2690464		μ_D =91,47	$\mu_{\tilde{D}}$=87,64

Calculamos a varianza da densidade de poboación pola fórmula:

$$\mathrm{Var}(D) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \times p_i - \mu_D^2, \tag{3.77}$$

para o cal elaboramos a seguinte táboa

d_i	p_i	$\tilde{d}_i$	d_i^2	$\tilde{d}_i^2$	$d_i^2 \times p_i$	$\tilde{d}_i^2 \times p_i$
0,0	0,3805	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10,5	0,272	9,17	110,25	84,09	30,56	23,31
35,0	0,1541	32,50	1225,00	1056,25	188,77	162,77
74,5	0,0863	69,44	5550,25	4821,91	478,99	416,13
295,5	0,0786	208,41	87320,25	43434,73	6863,37	3413,97
749,5	0,0108	687,86	561750,25	473151,38	6066,90	5110,03
1749,5	0,0071	1589,40	3060750,25	2526192,36	21731,33	17935,97
3749,5	0,0028	3533.68	14058750,25	12486894,34	39364,50	34963,30
7499,5	0,0014	6845,27	56242500,25	46857721,37	78739,50	65600,81
10000	0,0012	16285,69	100000000,00	265223698,78	120000,00	318268,44
Suma					273463,9	445894,7

Polo tanto as varianzas son

$$\sigma_D^2 = 273463{,}9 - 91{,}47^2 = 265097{,}1, \quad \sigma_{\tilde{D}}^2 = 445894{,}7 - 87{,}64^2 = 438213{,}9. \tag{3.78}$$

As desviacións típicas son

$$\sigma_D = \sqrt{265097{,}1} = 514{,}9, \quad \sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{438213,9} = 661{,}97, \tag{3.79}$$

habitantes por km^2, respectivamente.

Observamos que a dispersión da variable toma valor de 661,97 h/km^2 fronte a un valor medio de 87,64 h/km^2. Valor moi alto, polo tanto, indicando unha grande variabilidade e dispersión da densidade de poboación galega. O coeficiente de variación de Pearson,

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{661{,}97}{87{,}64} = 7{,}58, \tag{3.80}$$

corrobora o indicando anteriormente. Se comparamos cos datos que aparecen no enunciado de Catalunya e Madrid, certamente temos unha dispersión moi alta.

□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias.

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (*Influencers*) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.