Parques eólicos

Situación de aprendizaxe 5. Un aeroxerador ou xerador eólico é un dispositivo que converte a enerxía cinética do vento (fonte natural e renovábel) en electricidade. Podemos pensar que é o oposto dun ventilador, que usa electricidade para crear vento, pois o aeroxerador aproveita o vento para producir electricidade. Unha das premisas na súa construción é que canto máis alto sexa o aeroxerador, máis forte é o vento, xa que hai menos obstáculos ao seu paso. Ademais, canto máis alto é, maiores serán as aspas e maior superficie de captación de vento. Normalmente teñen tres aspas, para mellorar a estabilidade. Os primeiros aeroxeradores tiñan unhas aspas pequenas (arredor de 10 metros). Os que se fabrican na actualidade poden situarse arredor de 85 metros. Os deseños actuais están feitos para producir máis enerxía, en función da área en metros cadrados barrida polas aspas, e requiren fustes maiores que chegan a medir 120 metros.

Nesta situación comézase cun proceso de familiarización das unidades e da enerxía que pode producir un único aeroxerador. Posteriormente analízanse dous dos problemas máis importantes, xunto co retorno económico, relacionados con este tipo de instalacións: o ruído que xeran e a afectación nos ecosistemas. Finalmente, a análise da enerxía renovábel que xeramos conduce a valorar se somos ou non somos autosuficientes desde o punto de vista enerxético, e a importancia de decidir onde localizar novos parques eólicos. Preténdese que o alumnado sexa consciente das repercusións do gasto enerxético e as consecuencias a moitos niveis de decisións como a localización de parques eólicos. Como reto final debe evidenciarse un produto final: construción dun texto que se sirva da resolución das distintas tarefas e empregue os estímulos presentados para facer unha proposta de xeración de enerxía sustentábel.

Imaxe de fondo obtida de https:www.freepik.com

Estímulo 5.1: As persoas e as comunidades non poden vivir sen enerxía.

A enerxía existe no planeta Terra en diferentes estados e os seres humanos aproveitárona de forma diferente ao longo dos séculos. Ata finais do século XVIII case a totalidade da enerxía usada era renovábel, procedía do sol na forma de leña, vento, auga.... Tamén se utilizaba moita enerxía humana para facer traballos, producir produtos, subministrar servizos. A partir da xeneralización do sistema económico capitalista a principal fonte enerxética usada foron, e son, os combustíbeis fósiles. Estes adoitan a forma de petróleo, de gas natural, de carbón.... Iso permitiu un impresionante crecemento económico en todos os países, especialmente nos da esfera occidental. Nos últimos anos tamén outros países se sumaron a esa dinámica. Foron as economías emerxente ou BRICS: Brasil, Rusia, China, India .... En menor medida, as chamadas economías subdesenvolvidas (a meirande parte de África, moitos países asiáticos e da América Latina) tamén comezaron a crecer fortemente nas últimas décadas.

Ese forte crecemento económico alcanzado por medio dos combustíbeis fósiles, e as tecnoloxías asociadas, mellorou a calidade de vida pero trouxo tamén problemas ambientais. O principal é a aceleración do cambio climático por unha excesiva emisión á atmosfera dos chamados gases do efeito invernadoiro.

Para loitar contra ese grave problema ambiental, algúns acordos internacionais (como o Protocolo de Kyoto, o Acordo de París e o Pacto Verde Europeo) e moitos plans e programas dos Estados membros da Unión Europea (como o PNIEC en España) así como nas diferentes Comunidades Autónomas (Estratexia Galega de cambio climático e enerxía 2050) establecen acordos, obxectivos e medidas de política económica, enerxética e ambiental para reducir as emisións de CO_2. Entre as medidas que se establecen figura o avance das enerxías renovábeis para producir electricidade.

Desa forma, ese tipo de fontes enerxéticas comezaron a espallarse de forma acelerada en Europa, en España e en Galiza. O mesmo ocorreu en moitos outros países. No caso galego, desde principios de século XX comezaron a avanzar os aproveitamentos hidráulicos, moi acelerados entre os anos corenta e setenta desa mesma centuria. A enerxía fotovoltaica ten un desenvolvemento moi incipiente nos últimos anos. E desde finais dos anos noventa do século pasado, a enerxía eólica non deixou de crecer. No ano 2019 a potencia eólica instalada superou por primeira vez a gran hidráulica (encoros de máis de 10 MW). Na actualidade pouco máis de 4.000 MW están instalados en parques eólicos espallados por todo o territorio galego, todos eles en terras de concellos rurais. As vantaxes de producir electricidade coa forza do vento, da auga ou do sol son moitas. Son de natureza ambiental, pois son moito máis respectuosas coa natureza. Son sociais e económicos, pois ao seren plantas relativamente pequenas pode haber beneficios espallados polo territorio, como empregos directos e indirectos. E son estratéxicos, ou políticos, pois un país que dependa deses recursos naturais non sufrirá presión ou perturbacións externas que se producen cando son poucos os produtores de enerxía e esta está concentrada, como ocorreu agora cos combustíbeis fósiles. Tamén se poden producir problemas co seu desenvolvemento. Se o parecer da cidadanía local non é considerado, pódese rebelar contra a súa instalación. Se son instalados en ecosistemas con alto valor ambiental, pódense xerar estragos neses bens ambientais. Se son colocados moi cerca dos lugares habitados, ou en paisaxes sensíbeis, pódense producir problemas para as persoas. As néboas que causan os grandes encoros poden ser un problema. Outro pode vir derivado da proximidade dos grandes aeroxeradores ás casas habitadas.

Texto de **Xavier Simón Fernández**, Catedrático de Economía Aplicada na Universidade de Vigo e membro do Centro de Investigación Interuniversitario das Paisaxes Atlánticas Culturais (CISPAC).

Estímulo 5.2: Viñeta de Xosé Lois González Vázquez, "o Carrabouxo", publicada no xornal *La Región*

https://carrabouxo.es/2021/06/25/carra24-6-21/

Estímulo 5.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, "o Bichero", publicada no xornal *Faro de Vigo*

http://obichero.blogspot.com/2008/12/concurso-elico.html

Estímulo 5.4: Viñeta de Pablo Prado "Fuco" no xornal *Novas do Eixo Atlántico*

https://www.novasdoeixoatlantico.com/chas-carras-chas-enerxia-eolica/

Tarefa 5.1. Tempo estimado para a resolución: 25'. Chegamos a un parque eólico onde hai distintos elementos xa instalados, que producen unha cantidade distinta de enerxía en función das 8.760 horas que ten un ano. Temos aeroxeradores de tres tipos que xeran distintas cantidades anuais de enerxía. Analizando os datos dos últimos anos sabemos que no ano 2021 funcionaron correctamente 10, 20 e 5 aeroxeradores, respectivamente, xerando 155.500 MWh. No ano 2022 puxeron en funcionamento novos xeradores e deixaron de reparar algún do tipo 3, quedando 12, 25 e 2 aeroxeradores, respectivamente, que xeraron 177.000 MWh. Finalmente, no ano 2023 chegaron 5 xeradores máis do tipo 1, pero non teñen clara cal foi a produción dos parques.

1. Averigua canto produce cada tipo de aeroxeradores (podes empregar algún software como Geogebra, Sage ou Maxima).
2. Que rango de valores da produción do ano 2023 é posíbel?
3. Cales son, no ano 2023, os valores mínimo e máximo da suma das producións dos tres tipos de aeroxeradores?

Solución. **(1)** Formulamos o sistema de ecuacións

$$\begin{cases} 10E_1 + 20E_2 + 5E_3 = 155.500, \\ 12E_1 + 25E_2 + 2E_3 = 177.000, \\ 17E_1 + 25E_2 + 2E_3 = m. \end{cases} \tag{5.1}$$

Sexan

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 12 & 25 & 2 \\ 17 & 25 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 155.500 \\ 177.000 \\ m \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Se resolvemos o sistema $AX = B$ resulta

$$E_1 = \frac{1}{5}(m - 177.000)\,\text{MWh/ano}, \quad E_2 = \frac{8}{85}(248.750 - m)\,\text{MWh/ano}, \tag{5.3}$$

$$E_3 = \frac{2}{85}(350.750 - m)\,\text{MWh/ano}. \tag{5.4}$$

(2) Posto que a produción debe ofrecer valores non negativos, temos as seguintes desigualdades para o parámetro m:

$$m \geq 177.000, \quad m \leq 248.750, \quad m \leq 350.750. \tag{5.5}$$

En consecuencia, o rango posíbel para o parámetro m é

$$m \in [177.000, 248.750]. \tag{5.6}$$

(3) Temos que a suma das producións vén dada por

$$\frac{1}{5}(m-177.000)+\frac{8}{85}(248.750-m)+\frac{2}{85}(350.750-m)=\frac{1}{85}(7m-317500)=P(m). \tag{5.7}$$

Trátase dunha función linear crecente, polo que o valor mínimo atinxirase en $m = 177.000$ e o valor máximo en $m = 248.750$.

$$\min P(m) = P(177.000) = 10841{,}2\,\text{MWh/ano}, \tag{5.8}$$

$$\max P(m) = P(248.750) = 16.750\,\text{MWh/ano}. \tag{5.9}$$

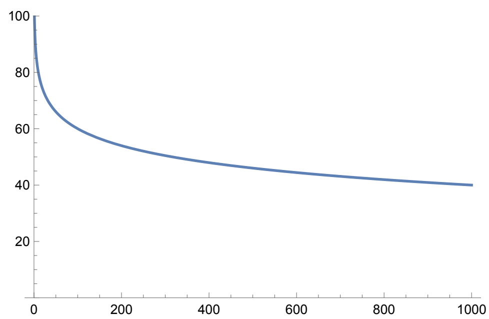
□

Tarefa 5.2. Tempo estimado para a resolución: 20'. Un dos problemas que hai que resolver para a instalación dun parque eólico é a distancia ás casas que xa existen na maioría dos nosos montes, relacionado co estímulo 5.1. En particular, un dos problemas que xorden é o ruído permanente e constante que emiten, que pode ser molesto polo día, e pola noite causar grandes trastornos no sono. Para resolver esta cuestión empregamos algunhas simplificacións de como se propaga un son, no noso caso a través dun medio que consideraremos homoxéneo como é o ar. As ondas esténdense uniformemente en todas as direccións, diminuíndo a amplitude a medida que estamos máis lonxe da fonte xeradora do ruído, de xeito semellante ao que se pode observar se guindamos unha pedra a un estanque de auga. Se medimos a intensidade do son nun punto a unha distancia x entre un e mil metros do aeroxerador temos

$$R(x) = 100 - 20\log_{10}(x)\ \text{dB}. \tag{5.10}$$

1. O ruído aumenta ou diminúe cando nos afastamos do aeroxerador?
2. A que distancia do aeroxerador se produce o máximo ruído?
3. Representa graficamente a aproximación da función ruído no seu dominio de definición.
4. O valor máximo permitido para unha discoteca é de aproximadamente 60dB pola noite. Se a normativa di que o ruído nas vivendas non pode superar os 45 dB, cal é a distancia mínima entre as vivendas e un aeroxerador?
5. Xustifica se a estimación do ruído $R(x)$ é ou non é válida para distancias moi grandes? E para valores moi pequenos e moito menores dun metro? Comproba os teus razoamentos empregando algún software como Geogebra, Sage ou Maxima.

Solución. A representación da función do ruído en termos da distancia ao aeroxerador entre un e mil metros é



Se calculamos a derivada da función $R(x)$ temos que

$$R'(x) = -\frac{20}{x \log_e(10)} < 0 \tag{5.11}$$

polo que a función $R(x)$ é monótona decrecente en todo o seu dominio de definición. Isto implica que a función $R(x)$ atinxe o seu valor máximo no punto $x = 1$ resultando $R(1) = 100$ dB.

Para determinar a que distancia o valor é de 45 dB, temos que resolver

$$45 = 100 - 20 \log_{10}(x) \ , \tag{5.12}$$

ou equivalentemente

$$55 = 20 \log_{10}(x) \tag{5.13}$$

de onde

$$\log_{10}(x) = \frac{55}{20} \tag{5.14}$$

polo que

$$x \approx 562,341 \, \text{metros}. \tag{5.15}$$

Se calculamos o límite cando $x \to \infty$ para determinar se a estimación pode ser válida para valores de x moi grandes temos que

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \lim_{x \to \infty} 100 - 20 \log_{10}(x) = -\infty, \tag{5.16}$$

de xeito que a estimación non é correcta pois implicaría valores negativos de ruído a partir dunha determinada distancia (que se pode calcular e son 100.000 metros).

A medida que x está entre 0 e 1 metros, se calculamos o límite cando $x \to 0$ da función estimación do ruído temos

$$\lim_{x \to 0^+} R(x) = \lim_{x \to 0^+} 100 - 20 \log_{10}(x) = +\infty, \tag{5.17}$$

que, novamente, non é realista.

□

Tarefa 5.3. Tempo estimado para a resolución: 15'. Ao afectaren ao ecosistema natural dunha determinada zona, as mancomunidades de montes consideran que os alugueiros por instalar parques eólicos deben tamén compensar os múltiples danos ambientais, como a afectación da águia real ou plantas como a *centaurea ultreiae*, flor endémica ameazada polos parques eólicos. A loita contra determinados intereses ás veces pretende semellar que as persoas que cuestionan as localizacións dalgúns parques eólicos son auténticos Quixotes, co obxecto de desvirtuar o traballo que fan, como se desprende dos estímulos 5.2 e 5.3:

Nisto descubriron trinta ou corenta muíños de vento que hai naquel campo e, en canto os viu don Quixote, díxolle ao seu escudeiro:
A ventura vai guiando as nosas cousas mellor do que nos gustaría; porque alí ves, amigo Sancho Panza, onde se descobren trinta, ou uns cantos máis, desaforados xigantes, cos que penso facer batalla e quitarlles a todos as vidas, con cuxos restos comezaremos a enriquecernos; que esta é unha boa guerra, e é un gran servizo de Deus quitar tan mala semente da faz da terra.

– *Que xigantes?, dixo Sancho Panza.*

– *Os que alí ves, respondeu o seu amo, con longos brazos, que os adoitan ter algúns de case dúas leguas.*

– *Mire, señoría —respondeu Sancho—, que os que parecen non son xigantes senón muíños de vento e o que semellan armas sobre eles son as aspas que, xiradas polo vento, fan mover a moa.* Aínda que pareza incríbel, nesta versión da historia, Don Quixote era un gran coñecedor da xeometría e localizou unha fila de muíños de ventos na recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, \tag{5.18}$$

polo que decidiu seguir montado en Rocinante a traxectoria descrita pola recta

$$s : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}, \tag{5.19}$$

mentres Sancho Panza lle dicía que non acometese desigual batalla.

1. Estuda se nesta versión da historia Don Quixote leva unha boa traxectoria para impactar coa fila de muíños de vento.

2. Se a traxectoria é boa, calcula o punto de encontro entre D. Quixote e a fila dos aeroxeradores. Se é errónea, determina a mínima distancia á que se atopará D. Quixote na súa acometida aos aeroxeradores.

Solución. A idea do enunciado xa a apuntou o humorista gráfico Xosé Lois nunha das súas viñetas d'O Carrabouxo `https://carrabouxo.es/2021/09/09/carra8-9-21/`

Antes de comezar a resolución consideramos acaído suxerir ao alumnado unha pequena lectura sobre as traducións da obra de Miguel de Cervantes Saavedra para o galego: https://academia.gal/-/o-primeiro-quixote-en-galego ou mesmo para o portugués: https://books.openedition.org/pumi/3291. Sinalamos tamén que a tradución do texto no enunciado foi feita polos autores deste libro.

Das ecuacións dadas para as rectas r e s temos os seguintes puntos en cada unha delas

$$P_r = (1, 3, -1), \qquad Q_s = (0, -1, 1). \tag{5.20}$$

Xa que logo, podemos calcular o vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$ mediante

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (0, -1, 1) - (1, 3, -1) = (-1, -4, 2). \tag{5.21}$$

Ademais, os vectores directores das dúas rectas son

$$\vec{v}_r = (2, 1, -2), \quad \vec{w}_s = (-2, 1, 2). \tag{5.22}$$

Se agora calculamos o determinante

$$\det(\overrightarrow{P_rQ_s}, \vec{v}_r, \vec{w}_s) = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \tag{5.23}$$

polo que temos que as rectas se cruzan e a traxectoria calculada por Don Quixote é errónea.

Ademais, xa que

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} + 4\vec{k} = (4, 0, 4), \tag{5.24}$$

que ten por módulo

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = |(4, 0, 4)| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}. \tag{5.25}$$

Finalmente, temos que a distancia entre as dúas rectas é

$$d(r, s) = \frac{\det(\overrightarrow{P_rQ_s}, \vec{v}_r, \vec{w}_s)}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{5.26}$$

□

Tarefa 5.4. Tempo estimado para a resolución: 15'. Cando a velocidade do vento é alta, as pas flexan e poden bater coa torre. Por motivos de seguridade con velocidades do vento superiores a 60km/h comezan a monitorizar as velocidades do vento por se fose necesario parar o aeroxerador. Nun determinado parque eólico, á altura do rotor, a velocidade do vento distribúese segundo unha distribución normal $N(\mu = 30; \sigma = 15)$. Elixidos días ao azar:

1. Cal é a probabilidade de que non haxa que monitorizar ningún día nunha semana?
2. Cal é a probabilidade de que haxa que monitorizar todos os días nunha semana?
3. Cal é a probabilidade de que haxa que monitorizar menos de 30 días nun ano non bisesto?

Solución. Consideremos a variábel aleatoria

$$\text{V=velocidade do vento,} \tag{5.27}$$

que podemos aproximar por unha normal $N(\mu = 30; \sigma = 15)$. A probabilidade de ter que monitorizar o aeroxerador é:

$$P(V > 60) = P\left(\frac{V-30}{15} > \frac{60-30}{15}\right) = P(Z > 2) = 0{,}02275013. \tag{5.28}$$

Sexa a variábel

$$\text{X}_7 = \text{número de días que se apaga o aeroxerador de 7} \tag{5.29}$$

que segue unha distribución binomial B(n=7; p=0,02275013). Entón

$$P(X_7 = 0) = \binom{7}{0} 0{,}02275013^0 (1 - 0{,}02275013)^7 = 0{,}8512152. \tag{5.30}$$

Para calcular a probabilidade de que haxa que monitorizar todos os días nunha semana facemos

$$P(X_7 = 7) = \binom{7}{7} 0{,}02275013^7 (1 - 0{,}02275013)^0 = 0{,}0000315419. \tag{5.31}$$

Consideremos agora a variábel

$$\text{X}_{365} = \text{número de días que se monitoriza o aeroxerador de 365 días.} \tag{5.32}$$

Teriamos unha distribución binomial B(n=365; p=0,02275013). Posto que

$$n = 365 \geq 30, \quad np = 8{,}303798 > 5, \quad n(1-p) = 356{,}6962 > 5, \tag{5.33}$$

podemos aproximar a binomial anterior por unha distribución normal, é dicir

$$\begin{aligned} X_{365} &\sim B(n = 365; p = 0{,}02275013) \\ &\approx \tilde{X} \sim N(np = 8{,}303798; \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{8{,}114885}). \end{aligned} \tag{5.34}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} P(X_{365} < 30) \approx P(\tilde{X} < 30 - 0{,}5) = P\left(\frac{\tilde{X} - 8{,}303798}{2{,}848664} < \frac{29{,}5 - 8{,}303798}{2{,}848664}\right) \\ = P\left(Z < 26{,}58502\right) \approx 1.0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

□

Tarefa extra 5.1. Constrúe un texto sobre os parques eólicos estruturado en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 5.2. Retomamos os problemas sinalados na tarefa 5.2. Para o primeiro problema, un grupo de investigadoras da Universidade de Vigo comezou a deseñar unha serie de luces para que as aves non se dirixan contra os aeroxeradores. Comezaron con proxeccións paralelas desde o propio pé do aeroxerador, pero non conseguían resolver os problemas coa rotación na parte superior das aspas. Por iso pensaron en proxectar luces desde os distintos aeroxeradores que se cruzasen entre elas para maximizar o espazo no que non voarían as aves. Colocan as luces nos rotores onde engarzan as tres pas do aeroxerador.
Nun primeiro aeroxerador que ten o rotor no punto $(2, 3, -1)$ colocan unha luz na dirección $(2, 1, -2)$. Noutro aeroxerador situado no punto $(-1, 0, 1)$ colocan outra luz apuntando na dirección $(-2, 1, m)$, onde $m \neq 0$. Estuda, en función do valor de m, se estas rectas cumpren a condición de que se crucen. Determina o valor de m para o cal a distancia entre as dúas luces emitidas é máxima.

Solución. Sexan

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, \qquad s : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{m}. \tag{5.36}$$

Denotamos

$$P_r = (2,3,-1), \qquad Q_s = (-1,0,1), \quad \overrightarrow{P_rQ_s} = (-3,-3,2), \tag{5.37}$$

$$\vec{v}_r = (2,1,-2), \quad \vec{v}_s = (-2,1,m). \tag{5.38}$$

Temos entón

$$\det(\overrightarrow{P_rQ_s}, \vec{v}_r, \vec{w}_s) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & m \end{vmatrix} = 3m - 10. \tag{5.39}$$

Para $m \neq 10/3$ podemos calcular a distancia entre as dúas rectas:

$$d(r,s) = \frac{|3m-10|}{|\vec{v}_r \times v_s|}. \tag{5.40}$$

Calculamos entón

$$\vec{v}_r \times v_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & m \end{vmatrix} = (2+m, 4-2m, 4), \tag{5.41}$$

que ten por módulo

$$\sqrt{36 - 12m + 5m^2}. \tag{5.42}$$

Xa que logo, temos que maximizar

$$F(m) = \frac{|3m-10|}{\sqrt{36-12m+5m^2}}. \tag{5.43}$$

Podemos maximizar o cadrado da función ou a propia función. Neste caso, analizamos directamente a función para o cal temos que dividir o numerador en dúas rexións. Posto que a función valor absoluto non é derivábel temos que analizar dous casos, cando $m > 10/3$ e cando $m < 10/3$. No primeiro caso,

$$F_1(m) = \frac{3m-10}{\sqrt{36-12m+5m^2}}, \tag{5.44}$$

ten por derivada con respecto a m

$$F_1'(m) = \frac{32m+48}{(m(5m-12)+36)^{3/2}}, \tag{5.45}$$

que se anula no punto $m = -3/2$ que non interesa pois $m > 10/3$.

Por outra banda, se $m < 10/3$ temos

$$F_2(m) = \frac{10-3m}{\sqrt{36-12m+5m^2}}, \tag{5.46}$$

con derivada

$$F_2'(m) = -\frac{16(2m+3)}{(m(5m-12)+36)^{3/2}}. \tag{5.47}$$

Temos que $F_2'(m) = 0$ no punto $m = -3/2$. Analizando o signo da derivada antes e despois do posíbel extremo, temos que nese punto hai un máximo relativo. □

Tarefa extra 5.3. Retomamos novamente os problemas sinalados na tarefa 5.2. Un grupo de investigadoras da Universidade de Vigo comezou a deseñar unha serie de luces para que as aves non se dirixan contra os aeroxeradores. Deciden empregar luces emitidas desde os rotores dos aeroxeradores e receptores nos outros aeroxeradores, tamén nos rotores, para que, no caso de que algún paxaro cruce a dita luz emita un son disuasorio. É fundamental que as luces, que veñen determinadas por rectas, non intersequen para evitar ter son disuasorio permanente.

Temos tres rectas das luces emitidas e recibidas entre tres aeroxeradores dadas polas ecuacións

$$r : \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad s : \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{2}, \tag{5.48}$$

$$t : \frac{x-2}{m} = y-2 = \frac{z-1}{-3}, \tag{5.49}$$

onde temos un parámetro m libre que permite orientar as rectas s e t.

1. Determina os valores de m para que dúas calquera destas rectas se crucen.
2. Determinamos unha función de distancia como a suma dos cadrados da distancia entre as rectas r e s e a distancia entre as rectas s e t. Coa axuda dalgún software como Geogebra, Sage ou Maxima, determina $m \geq 0$ para maximizar e minimizar esta función de distancia.

Solución. **(1)** Sexan

$$P_r = (4,1,-2), \quad P_s = (1,-2,8), \quad P_t = (2,2,1), \tag{5.50}$$

$$\vec{v}_r = (2,-1,3), \quad \vec{v}_s = (m,-2,2), \quad \vec{v}_t = (m,1,-3), \tag{5.51}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-3,-3,10), \quad \overrightarrow{P_sP_t} = (1,4,-7), \quad \overrightarrow{P_rP_t} = (-2,1,3). \tag{5.52}$$

Temos entón, por unha banda entre r e s:

$$\det[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = -40 + m, \tag{5.53}$$

por outra entre s e t:

$$\det[\overrightarrow{P_sP_t}, \vec{v}_s, \vec{v}_t] = 4 - m, \tag{5.54}$$

e finalmente entre r e t:

$$\det[\overrightarrow{P_rP_t}, \vec{v}_r, \vec{v}_t] = 12 + 6m. \tag{5.55}$$

Xa que logo,

1. Se $m \neq 40$ temos que se cruzan as rectas r e s.
2. Se $m \neq 4$ temos que se cruzan as rectas s e t.
3. Se $m \neq -2$ temos que se cruzan as rectas r e t.

Polo tanto se $m \neq -2, 4, 40$ temos que se cruzan os tres posíbeis pares de rectas dadas.

(2) Calculamos en primeiro lugar a distancia entre as rectas r e s mediante

$$d(r,s) = \frac{|\det[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|m-40|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}. \tag{5.56}$$

Posto que

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ m & -2 & 2 \end{vmatrix} = (4, 3m-4, m-4), \tag{5.57}$$

temos que

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{16 + (m-4)^2 + (3m-4)^2} = \sqrt{48 - 32m + 10m^2}, \tag{5.58}$$

de onde

$$d(r,s) = \frac{|m-40|}{\sqrt{48 - 32m + 10m^2}}. \tag{5.59}$$

Convén observar que as raíces do denominador son complexas.

Calculamos agora a distancia entre a recta s e a recta t empregando novamente

$$d(s,t) = \frac{|\det[\overrightarrow{P_sP_t}, \vec{v}_s, \vec{v}_t]|}{|\vec{v}_s \times \vec{v}_t|} = \frac{|4-m|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}. \tag{5.60}$$

Neste segundo caso

$$\vec{v}_s \times \vec{v}_t = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ m & -2 & 2 \\ m & 1 & -3 \end{vmatrix} = (4, 5m, 3m), \tag{5.61}$$

polo que

$$|\vec{v}_s \times \vec{v}_t| = \sqrt{34m^2 + 16}. \tag{5.62}$$

Entón

$$d(s,t) = \frac{|4-m|}{\sqrt{34m^2+16}}, \tag{5.63}$$

onde novamente o denominador non ten raíces reais.

A función obxectivo neste caso é

$$O(m) = \frac{(4-m)^2}{34m^2+16} + \frac{(40-m)^2}{10m^2-32m+48}, \tag{5.64}$$

que ten por derivada

$$O'(m) = -\frac{68m(4-m)^2}{(34m^2+16)^2} - \frac{2(4-m)}{34m^2+16} - \frac{2(40-m)}{10m^2-32m+48} - \frac{(40-m)^2(20m-32)}{(10m^2-32m+48)^2}. \tag{5.65}$$

Se queremos resolver $O'(m) = 0$ temos que determinar as raíces do polinomio de sexto grao

$$p(m) = 4\Big(14297m^6 - 580636m^5 + 887288m^4 - 586880m^3 + 864704m^2 - 159488m + 184832\Big), \tag{5.66}$$

que están fóra dos obxectivos da materia. Coa axuda de Geogebra podemos determinar que ten unicamente dúas raíces reais (polo tanto ten catro raíces complexas) nos puntos

$$m_1 = 1{,}53964, \quad m_2 = 39{,}049. \tag{5.67}$$

Se consideramos un valor de m menor que m_1, p. ex. $m = 0$ temos que $O'(m) > 0$. Se consideramos un valor de m entre m_1 e m_2 temos que $O'(m) < 0$. Polo tanto no punto m_1 a función $O(m)$ presenta un máximo relativo.

Se agora consideramos un punto m maior que m_2 resulta que $O'(m)$ é positiva novamente, polo que nese punto m_2 a función $O(m)$ presenta un mínimo relativo.

No máximo relativo a distancia é de 65,9911, mentres que no mínimo relativo a distancia é de 0,023751. Ademais, no intervalo $[0, m_1]$ a función $O(m)$ é crecente, polo que calculamos $O(0) = 103/3 \approx 34{,}333$, polo que o mínimo relativo é tamén absoluto. Posto que m pode medrar indefinidamente é claro que $O(m)$ tende a $+\infty$ cando $m \to +\infty$ de xeito que o máximo relativo só é relativo e non é absoluto. $\square$

Tarefa extra 5.4. Despois de moitas observacións coa axuda dun dron deseñado pola Escola de Enxeñaría Aeronáutica e do Espazo da Universidade de Vigo, se o aeroxerador está na orixe do sistema de referencia, as proxeccións sobre o plano $z = 0$ das traxectorias dos paxaros ao achegarse a un aeroxerador seguen un patrón moi interesante: a distancia ao punto $A(4, 0)$ é o dobre da súa distancia á recta $x = 1$.

1. Determina o lugar xeométrico que describe as curvas dos paxaros.

2. Que tipo de traxectoria describen?

Solución. Temos que formular como ecuación

$$d(P, A) = 2d(P, r) \tag{5.68}$$

onde $P = (x, y)$ é o punto que sinala a proxección no plano $z = 0$ da traxectoria do paxaro, $A = (4, 0)$ e a recta r ten por ecuación $x = 1$.

Temos entón por unha banda

$$d(P, A) = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 0)^2}, \tag{5.69}$$

e pola outra

$$d(P, r) = \frac{|x - 1|}{1}. \tag{5.70}$$

Polo tanto, se igualamos, resulta

$$\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 2|x - 1|, \tag{5.71}$$

polo que elevando ao cadrado

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4(x - 1)^2, \tag{5.72}$$

de onde

$$12 - 3x^2 + y^2 = 0. \tag{5.73}$$

Podemos expresar a anterior ecuación como

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, \tag{5.74}$$

é dicir, os paxaros seguen unha hipérbole.

□

Tarefa extra 5.5. Tempo despois deciden colocar un sistema de detección por radar dos paxaros. Ao traballar con radares temos que reconstruír un sinal continuo limitado en banda a partir de mostras dese sinal espaciadas uniformemente. Para iso, como xa sinalou Phillip M. Woodward no ano 1953, cómpre estudar a denominada función *sinc* https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function, que podemos definir mediante

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \tag{5.75}$$

1. Estuda a continuidade da función $\operatorname{sinc}(x)$ no seu dominio de definición.
2. Estuda a derivabilidade da función $\operatorname{sinc}(x)$ no seu dominio de definición. Determina, se é posíbel calcular a recta tanxente á función $\operatorname{sinc}(x)$ no punto $a = 0$.
3. Estuda se a función $\operatorname{sinc}(x)$ é cóncava ou convexa nunha veciñanza do punto $a = 0$.

Solución. **(1)** Temos, por unha banda, que a función $\operatorname{sinc}(x)$ é continua en todo $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ por ser composición e cociente de aplicacións continuas onde o denominador non se anula. Ademais, no punto $a = 0$ temos que, empregando a definición, $\operatorname{sinc}(0) = 1$ e por outra banda

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sinc}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0}. \tag{5.76}$$

É posíbel resolver a indeterminación de moitos xeitos. Por unha banda, sabemos da materia de Física, ao analizar o movemento dun péndulo, que para ángulos pequenos $\operatorname{sen}(x) \approx x$ polo que o límite do cociente é 1. Outro xeito de resolver é empregar a regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1. \tag{5.77}$$

Polo tanto, xa que coinciden o valor da función no punto $a = 0$ co valor do límite cando $x \to 0$, temos que a función é continua nese punto.

(2) Para analizar a derivabilidade, derivamos en primeiro lugar fóra do punto $a = 0$, empregando as regras habituais de derivación. É dicir, se $x \neq 0$ temos que

$$\operatorname{sinc}'(x) = \frac{\cos(x)x - \operatorname{sen}(x)\,1}{x^2}. \tag{5.78}$$

Para calcular a derivada da función $\sin(x)$ no punto $a = 0$ xa que a función cambia de xeito de estar definida nunha veciñanza dese punto, temos que empregar a definición de derivada:

$$\operatorname{sinc}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sinc}(0+h) - \operatorname{sinc}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sinc}(h) - 1}{h}. \tag{5.79}$$

Cando $h \to 0$ entón $h \neq 0$ polo que a función $\operatorname{sinc}(h)$ vén dada polo cociente $\operatorname{sen}(h)/h$. Ao substituír resulta

$$\operatorname{sinc}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} - 1}{h}. \tag{5.80}$$

O numerador da anterior fracción tende a 0 polo visto na análise da continuidade; tamén tende a cero de xeito obvio o denominador. Podemos expresar o límite destoutro xeito

$$\operatorname{sinc}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h) - h}{h^2} = \frac{0}{0}. \tag{5.81}$$

Se aplicamos a regra de L'Hôpital resulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{2h} = \frac{0}{0}. \tag{5.82}$$

Aplicando novamente a regra de L'Hôpital obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h) - 0}{2} = 0. \tag{5.83}$$

Polo tanto, $\operatorname{sinc}'(0) = 0$. Xa que $\operatorname{sinc}(0) = 1$ temos que a ecuación da recta tanxente é $y = 1 + 0x = 1$.

(3) Para analizar se a función é cóncava ou convexa nunha veciñanza do punto $a = 0$ temos que calcular a derivada segunda da función $\operatorname{sinc}(x)$ no dito punto. Posto que

$$\operatorname{sinc}'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)x - \operatorname{sen}(x)}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{5.84}$$

Xa que a función $\operatorname{sinc}'(x)$ cambia de forma de estar definida cerca do punto $a = 0$ temos que empregar a definición de derivada, e ter en conta que a derivada segunda dunha función nun punto non é máis que a derivada da derivada primeira da función:

$$\operatorname{sinc}''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sinc}'(h) - \operatorname{sinc}'(0)}{h}. \tag{5.85}$$

Empregamos agora que ao tender $h \to 0$ temos que $h \neq 0$ para substituír $\operatorname{sinc}'(h)$, e posto que xa temos calculado antes que $\operatorname{sinc}'(0) = 0$ obtemos

$$\operatorname{sinc}''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos(h)h - \operatorname{sen}(h)}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)h - \operatorname{sen}(h)}{h^3} = \frac{0}{0}. \tag{5.86}$$

Empregamos a regra de L'Hôpital para resolver a indeterminación,

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)h - \cos(h) + \cos(h)}{3h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)h}{3h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{3h} = \frac{-1}{3}, \tag{5.87}$$

onde no último límite empregamos que cando $h \to 0$ temos que $\operatorname{sen}(h) \approx h$. En consecuencia,

$$\operatorname{sinc}''(0) = \frac{-1}{3} < 0, \tag{5.88}$$

polo que a función ten a mesma convexidade que $-x^2$.

$\square$

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias.

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois, ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado, o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (*Influencers*) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.