



Cambio climático

Situación de aprendizaxe 7. A recente traxedia derivada da DANA (depresión (a)illada en niveis altos) que tivo lugar en València ten moitas lecturas e puntos de vista para a súa análise. Unha delas é o cambio climático, como comeza a afectarnos e como nos afectará nun futuro non tan distante.

Cando falamos de cambio climático referímonos aos cambios a longo prazo non só das temperaturas senón tamén dos patróns meteorolóxicos, tal e como acabamos de observar pola dana. Certamente os cambios poden ser debidos a causas naturais, como poden ser os cambios e variacións na actividade solar ou as erupcións volcánicas como a que aconteceu en La Palma no ano 2021. Desde a «revolución industrial» a humanidade tamén está a influír no cambio climático, fundamentalmente pola queima de combustíbeis fósiles. Este xeito de xerar enerxía (cfr. segunda situación de aprendizaxe) produce gases de efecto invernadoiro, é dicir, capturan a calor solar e incrementan as temperaturas. Como reto final debe evidenciarse un produto final: construción dun texto que se sirva da resolución das distintas tarefas e empregue os estímulos presentados para levar a cabo unha reflexión sobre o cambio climático.

Imaxe de fondo obtida de <https://www.freepik.com>

Estímulo 7.1: O cambio climático.

O clima da Terra cambiou ao longo da historia. Só nos últimos 800.000 anos, houbo oito ciclos de glaciacións e períodos máis cálidos, e o final da última glaciación, hai uns 11.700 anos, marcou o comezo da era climática moderna e da civilización humana. Ademais o clima cambia tanto espacialmente como temporalmente. Sabemos que non é igual o clima en latitudes tropicais que en latitudes polares, nin tampouco gozan do mesmo clima as zonas costeiras que as zonas de alta montaña ou de interior. Ademais, en latitudes medias que é onde nos atopamos nós o clima tamén cambia no tempo, temos diferentes estacións ao longo do ano e podemos atoparnos con cambios no clima que poden ter unha variabilidade anual, decenal ou mesmo maior. Todos estes cambios teñen unha explicación que se atopa en causas naturais, como poden ser a variabilidade na órbita terrestre, a actividade volcánica ou a variabilidade solar entre outras. Con todo, desde o comezo da revolución industrial coa utilización primeiramente do carbón e posteriormente do petróleo para o desenvolvemento da actividade humana en todos os seus aspectos, industrial e social, os cambios observados no clima non se poden explicar unicamente tendo en conta causas naturais. Os estudos revelan que a subida vertixinosa, en termos climáticos, experimentada pola temperatura atmosférica globalmente ten unha estreita correlación co aumento da concentración de partículas de dióxido de carbono, CO_2 , na atmosfera. A dita relación foi feita xa pola climatóloga e inventora [Eunice Newton Foote](#) no 1856 cando levou a cabo un experimento fundamental que estableceu a conexión entre o dióxido de carbono (CO_2) e o quecemento atmosférico, precedendo por tres anos ao traballo de [John Tyndall](#). A pesar de que se coñecía dende hai tempo o efecto do aumento da concentración de CO_2 na atmosfera, non foi ata o cuarto informe do IPCC (organismo principal que estuda o Cambio Climático Intergovernmental Panel on Climate Change) publicado en 2007. Nese informe sinalase que cunha probabilidade superior ao 90% o cambio climático observado desde a Revolución Industrial non se pode explicar sen a consideración da influencia das actividades humanas en especial no seu papel no cambio na composición da atmosfera a través do incremento dos gases efecto invernadoiro pola utilización de combustibles fósiles. Chegar a esta conclusión de maneira inequívoca, en 2021, a través do sexto informe do IPCC, non foi tarefa fácil. Os estudos de cambio climático precisan de moitos datos, e durante un longo período de tempo, xa que non se poden facer afirmacións nin atribucións ao cambio climático polo que ocorre durante un verán ou dous, ou porque se produza unha nevada extraordinaria, senón que é necesario estudar e analizar series de datos que polo menos abarquen períodos de 30 anos.

A lonxitude das series de datos permite poder distinguir a variabilidade temporal natural que poida ter unha determinada variable daquela que só atopa unha explicación se consideramos a interacción antropoxénica. Para todos estes estudos necesitamos moitas ferramentas matemáticas e tecnolóxicas. Así para o estudo de clima e do cambio climático deben usarse desde conceptos máis teóricos como as funcións matemáticas ata algúns máis aplicados como os métodos computacionais, pasando pola estatística ou novas tecnoloxías como a computación cuántica.

Foi tamén en 2021 cando [Hasselmann](#) (Hamburgo, 1931) e [Manabe](#) (Ehime, Xapón, 1931) compartiron a metade do premio Nobel de Física «polo modelado físico do clima da Terra, cuantificando a variabilidade e predicindo con fiabilidade o quecemento global». A outra metade do premio foi para o físico [Giorgi Parisi](#) «polos seus estudos sobre as fluctuacións dos sistemas físicos en todas as escalas, desde os átomos aos sistemas planetarios». Hasselmann contribuíu ao desenvolvemento de métodos que estableceron que a actual tendencia ao quecemento global é atribuíble, principalmente, á actividade humana. Hasselmann favoreceu de forma decisiva o coñecemento do cambio climático. El foi pioneiro no desenvolvemento de modelos numéricos para o estudo do clima pero os seus estudos tamén axudaron a demostrar que o cambio climático que vivimos desde o comezo da Revolución Industrial pode ser atribuído á acción humana. O método desenvolvido por Hasselmann coñecido como «*fingerprinting*» («pegadas climáticas»), permite distinguir entre a variabilidade natural do clima e a debida ás actividades humanas. Os efectos do quecemento actual que avanza a un ritmo que non se viu en moitos milenios e que é debido en gran medida ao aumento das emisións de dióxido de carbono á atmosfera e a outras actividades humanas reflíctense na atmosfera, o océano e a terra, producíndose cambios rápidos e xeneralizados na atmosfera, o océano, a criosfera e a biosfera.

Aínda que cando falamos de cambio climático nun primeiro momento unicamente pensamos na temperatura media da superficie do planeta que superou neste ano 2024 os 1,5 °C desde finais do século XIX, tamén se constatou que o océano se está quentando. O océano absorbeu gran parte deste aumento de calor, e os 100 metros superiores do océano mostran un quecemento de máis de 0,33 graos Celsius desde 1969. Debemos lembrar que a Terra almacena o 90 % da enerxía adicional no océano. As capas de xeo de Groenlandia e a Antártida diminuíron en masa, tal como amosan os datos do [Gravity Recovery and Climate Experiment](#) da NASA, Groenlandia perdeu unha media de 279.000 millóns de toneladas de xeo por ano entre 1993 e 2019, mentres que a Antártida perdeu ao redor de 148.000 millóns de toneladas de xeo por ano. Os glaciares están a desaparecer en case todas as partes do mundo, mesmo nos Alpes, o Himalaia, os Andes, as Montañas Rochosas, Alaska e África. O nivel global do mar subiu uns 20 centímetros no último século acelerándose lixeiramente cada ano.

A cantidade de eventos extremos, tanto de precipitación como pode ser a última DANA en València, como de temperatura non só ocorren con máis frecuencia, senón con máis intensidade e afectando cada vez a áreas maiores. Ademais, desde o comezo da Revolución Industrial, a acidez das augas superficiais do océano aumentou aproximadamente un 30%. Este aumento débese á absorción por parte dos océanos de entre un 20% e un 30% das emisións de dióxido de carbono debidas á actividade humana, entre 7.200 e 10.800 millóns de toneladas métricas ao ano.

Todos estas observacións non teñen explicación sen ter en conta o incremento do efecto invernadoiro natural do noso planeta polo uso indiscriminado dos combustibles fósiles. As proxeccións nos diferentes escenarios climáticos propostos polo IPCC non son moi optimistas se non comezamos a diminuír as emisións de dióxido de carbón, unha atmosfera e un océano máis quente e tamén máis enerxética e esa enerxía dará lugar a eventos atmosféricos, como seca, olas de calor, precipitacións torrenciais, tornados,... cada vez máis frecuentes e intensos, afectando a áreas que ata o de agora non sufriran ditos fenómenos. Nas nosas mans está evitalo.

Texto de **Nieves Lorenzo González**, Catedrática de Física da Terra na Universidade de Vigo e directora da Escola de Enxeñaría Aeronáutica e do Espazo.

Estímulo 7.2: Viñeta de **Xosé Lois González Vázquez**, “o Carrabouxo”, publicada no xornal *La Región*



<https://carrabouxo.es/2019/06/19/carra18-6-19/>

Estímulo 7.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, “o Bichero”



<https://sostenibleosustentable.com/es/cambio-climatico/que-tipo-de-persona-eres-tu-frente-al-cambio-climatico/>

Estímulo 7.4: Viñeta de Pablo Prado “Fuco” no xornal *Novas do Eixo Atlántico*



https://www.instagram.com/p/CYmLw7HMSac/?img_index=4

Tarefa 7.1. Tempo estimado para a resolución: 25'. Se ben España viña sufrindo episodios de choiva torrencial na zona de Levante dende hai anos, nos últimos tempos, debido á subida de temperaturas do Mar Mediterráneo, estes episodios veñen derivando en DANAS (depresión (a)illada a niveis altos) devastadoras.

Un edificio próximo a un cavorco urbano viuse afectado pola última dana. Os bens afectados nese inmovible foron: dous baixos comerciais, tres coches, dúas motos e dúas pinturas de gran valor que estaban na galería de arte situada nun dos baixos comerciais rexentado por un «negacionista climático» reflectido no estímulo 7.2.

O importe da indemnización é distinto segundo o ben do que se trate. A indemnización polos coches segue unha distribución normal de media 2.500€ e desviación típica 1.200€.

1. Tendo en conta a porcentaxe de bens asegurados en España, cal é a probabilidade de que os propietarios cobren indemnización do Consorcio de Compensación de Seguros polo menos por 7 dos 9 bens afectados?
2. E de que os propietarios non cobren ningunha indemnización?
3. Cal é a probabilidade de que a indemnización media dos tres coches afectados nese edificio sexa superior a 2.450€?

Solución. Consideremos a variábel aleatoria

$$X = \text{número de bens dos que 9 son indemnizados.} \quad (7.1)$$

Polo referido no enunciado podemos afirmar que X segue unha distribución binomial con $n = 9$ e $p = 0,70$.

(1) Temos que calcular

$$\begin{aligned} P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) \\ = \binom{9}{7} 0,70^7 \cdot 0,30^2 + \binom{9}{8} 0,70^8 \cdot 0,30^1 + \binom{9}{9} 0,70^9 \cdot 0,30^0 \\ = 0,266828 + 0,15565 + 0,0403536 = 0,4628. \end{aligned} \quad (7.2)$$

(2) A probabilidade de que os propietarios non cobren ningunha indemnización vén dada por

$$P(X = 0) = \binom{9}{0} 0,70^0 \cdot 0,30^9 = 0,000019683. \quad (7.3)$$

(3) Consideremos agora a variábel

$$Y = \text{indemnización por cada coche.} \quad (7.4)$$

Segundo o sinalado no enunciado Y segue unha distribución normal $N(2.500;1.200)$. Consideremos a indemnización media dos tres

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} \quad (7.5)$$

que segue unha distribución normal $N(2.500;1.200/\sqrt{3})=N(2.500; 692,82)$. Polo tanto, a probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} > 2.450) &= P\left(\frac{\bar{Y} - 2.500}{692,82} > \frac{2.450 - 2.500}{692,82}\right) = P(Z > -0,07) \\ &= 1 - P(Z > 0,07) = 1 - [1 - P(Z < 0,07)] = P(Z < 0,07) = 0,5279. \end{aligned} \quad (7.6)$$

□

Tarefa 7.2. Tempo estimado para a resolución: 30'. Nos últimos anos as e os expertos veñen avisando de que a virulencia dos lumes ten aumentado. Isto débese á falta de xestión da masa forestal, ao cambio climático e á maior iteración entre o mundo urbano e o rural.

1. Un labrego ten unha casa e un alpendre para os animais, con coordenadas $C(5, 0, 1)$ e $A(6, 0, 0)$ en quilómetros respectivamente. O home está traballando nunha das súas leiras que ten a porta no punto $L(-1, 2, 1)$ no mesmo sistema de coordenadas, cando se declara un lume que ten o seu fronte paralelo a CA , a un quilómetro de distancia, e avanza a razón de 0,25 km/h. O labrego diríxese cara á súa casa e ao seu alpendre en bicicleta a unha velocidade de 20 km/h. Chegará a tempo de protexer a casa e liberar os animais antes de que chegue o lume? Podes pensar que, no país do minifundio, non hai que ter en conta a distancia desde o punto que se encontre traballando na leira ata a súa entrada.

2. Unha faísca prende no punto de coordenadas $F(34/11, 91/11, 23/11)$ contido no plano xerado polos puntos A , C e L . Un dos helicópteros co seu canastro cheo de auga sitúase perpendicularmente ao plano anterior no punto de coordenadas $H(2, 5, 1)$. Caerá a auga no novo foco do lume, tendo en conta que o vento que hai nese momento é irrelevante?
3. Nese instante, a que distancia se atopa voando o helicóptero sobre o plano?

Solución. (1) Temos que calcular a distancia desde a porta da leira L ata a recta que pasa polos puntos A e C . Posto que

$$\begin{cases} \vec{CA} = (1, 0, -1) \\ \vec{CL} = (-6, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{CL} \times \vec{CA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -6, -2). \quad (7.7)$$

Podemos entón calcular a distancia

$$d = \frac{|\vec{CL} \times \vec{CA}|}{|\vec{CA}|} = \sqrt{22} = 4,69 \text{ km.} \quad (7.8)$$

Empregamos agora a celeberrima fórmula que relaciona velocidade, espazo e tempo para determinar canto tardará en chegar:

$$t = \frac{e}{v} = \frac{4,69}{20} = 0,23 \text{ horas.} \quad (7.9)$$

Por outra banda, dos datos no enunciado o lume tarda

$$\frac{1}{0,25} = 4 \text{ horas} \quad (7.10)$$

de xeito que semella que terá tempo a liberar os animais antes de que chegue o lume.

(2) Desde o punto de vista matemático o que se pide é a proxección ortogonal da ubicación do helicóptero sobre o plano π determinado polos puntos A , C e L que ten por ecuación

$$\pi : \begin{vmatrix} x - 6 & y & z \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 6y - 2z + 12 = 0, \quad (7.11)$$

de onde temos

$$\pi : x + 3y + z - 6 = 0. \quad (7.12)$$

Calculamos agora a recta que pasa polo punto $H(2, 5, 1)$ e é perpendicular ao plano π

$$r : \begin{cases} x = 2 + \alpha, \\ y = 5 + 3\alpha, \\ z = 1 + \alpha. \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad (7.13)$$

Para rematar, a proxección de H sobre o plano π é o punto de corte da recta r e o plano π :

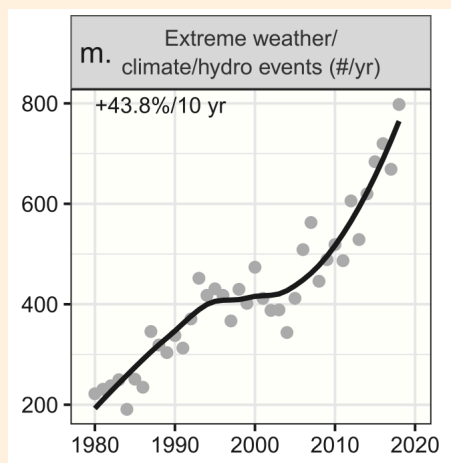
$$2 + \alpha + 3(5 + 3\alpha) + 1 + \alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{12}{11}, \quad (7.14)$$

de onde obtemos

$$H' = \left(2 + \frac{12}{11}, 5 + \frac{36}{11}, 1 + \frac{12}{11} \right) = \left(\frac{34}{11}, \frac{91}{11}, \frac{23}{11} \right), \quad (7.15)$$

polo que a auga impactará no novo foco do lume. \square

Tarefa 7.3. Tempo estimado para a resolución: 30'. Os efectos do cambio climático son cada vez máis palpábeis, provocando trastornos significativos nos ecosistemas, na economía e facendo inhabitables cada vez máis zonas da Terra, tal e como se representa nos estímulos 7.2 e 7.4. Cada 10 anos os desastres naturais teñen aumentado máis dun 45%. Os puntos de inflexión no comportamento da función que reflicte o número da función de desastres climáticos son de vital importancia na aceleración dos efectos do cambio climático. Nun artigo do ano 2020 titulado [World Scientists' Warning of a Climate Emergency](#), preséntanse distintas gráficas relacionadas co cambio climático, en particular:



Se o número de desastres naturais en función dos anos transcorridos desde 1980 vén dado pola función

$$f(x) = 0,02x^3 - 0,75x^2 + 19x + a, \quad x \geq 0, \quad (7.16)$$

1. Calcula o valor de a sabendo que no ano 2000 houbo 440 desastres naturais.
2. Calcula en que ano tivo lugar o último punto de inflexión significativo no comportamento da función.
3. Cantos desastres naturais se produciron nese momento?
4. Cal é o incremento no número de desastres na última década que aparece na gráfica superior?
5. Outro grupo de traballo estadounidense discrepa e mantén que o número de desastres naturais segue a función

$$g(x) = 218 e^{0,03x}, \quad x \geq 0, \quad (7.17)$$

pero está de acordo en que nos últimos anos se produciu un punto de inflexión. A que grupo de traballo apoiarías ti?

6. Se pasaron x anos desde 1980, serías quen de definir a función que nos dá o índice de incremento do número de desastres naturais de calquera ano respecto a 1980? Canto sería o incremento no ano 1990 respecto a 1980?

Solución. (1) Para analizar o ano 2000 temos que dar o valor $x = 20$ xa que comeza no ano 1980. Entón

$$f(20) = 0,02 \cdot 20^3 - 0,75 \cdot 20^2 + 19 \cdot 20 + a = 400, \quad (7.18)$$

de onde resulta que

$$a = 200. \quad (7.19)$$

(2) Posto que o dominio é $[0, +\infty)$ determinamos os posibles puntos de inflexión igualando a derivada segunda a cero. Para iso calculamos primeiro

$$f'(x) = 0,02 \cdot 3 \cdot x^2 - 0,75 \cdot 2 \cdot x + 19. \quad (7.20)$$

Polo tanto

$$f''(x) = 0,02 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x - 0,75 \cdot 2, \quad (7.21)$$

polo que ao igualar $f''(x) = 0$ resulta

$$x = \frac{1,5}{0,12} = 12,5. \quad (7.22)$$

Para $x < 12,5$ temos que $f''(x) < 0$ polo que a función é cóncava como $-x^2$ e para $x > 12,5$ entón $f''(x) > 0$ polo que a función é convexa como x^2 . En consecuencia, a función presenta un punto de inflexión no punto 12,5 que corresponde a 1992,5. Con outras palabras, o último punto de inflexión produciuse a mediados de 1992.

(3) Temos que

$$f(12,5) = 0,02 \cdot 12,5^3 - 0,75 \cdot 12,5^2 + 19 \cdot 12,5 + 200 = 359,375. \quad (7.23)$$

Polo tanto, producíronse 359 desastres naturais en 1992.

(4) Posto que o ano 2020 corresponde a $x = 40$ e o ano 2010 corresponde a $x = 30$, calculamos

$$f(40) = 1040, \quad f(30) = 635, \quad (7.24)$$

de onde temos que o incremento é

$$\frac{1040}{635} \cdot 100 = 163,78. \quad (7.25)$$

O número de desastres medrou nun 63,78%.

(5) Posto que o dominio da función $g(x)$ tamén é $[0, +\infty)$ calculamos outra vez a derivada segunda para determinar os posíbeis puntos de inflexión:

$$g'(x) = 218 \cdot 0,03 \cdot e^{0,03x} \Rightarrow g''(x) = 218 \cdot 0,03 \cdot 0,03 \cdot e^{0,03x}. \quad (7.26)$$

Xa que a función exponencial non ten raíces reais temos que $g''(x) \neq 0$, e polo tanto a función $g(x)$ non presenta puntos de inflexión.

Se temos en conta a gráfica do enunciado temos que $f(x)$ é máis próxima á realidade para avaliar o número de desastres naturais.

(6) Consideramos en xeral

$$F(x) = \frac{f(x)}{f(0)} \cdot 100, \quad (7.27)$$

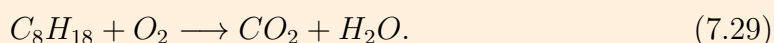
de xeito que

$$F(10) = \frac{f(10)}{f(0)} \cdot 100 = \frac{335}{200} \cdot 100 = 167,5. \quad (7.28)$$

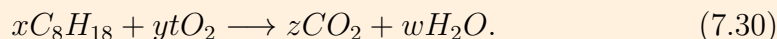
En consecuencia, o incremento foi do 67,5%.

□

Tarefa 7.4. Tempo estimado para a resolución: 30'. O dióxido de carbono, CO_2 , é necesario para procesos vitais como a fotosíntese, entre outros. Pero a abundancia de dióxido de carbono pode danar os ecosistemas oceánicos debido á acidificación dos océanos e á contaminación. A acidificación oceánica é a diminución gradual do pH (potencial de hidróxeno) do océano debido á absorción de dióxido de carbono en grandes cantidades na auga procedente da atmosfera. O dióxido de carbono ao mesturarse coa auga crea ácido carbónico que é o que provoca que o pH se volva máis acedo. A gran cantidade de dióxido de carbono na atmosfera non só supón un problema para os ecosistemas oceánicos, senón que tamén é un factor do quecemento global que afecta ao medio ambiente a maior escala. O dióxido de carbono e outros compostos contaminan a atmosfera en grandes cantidades causadas por reaccións simples. Algunhas reaccións requiren máis reactivos para obter un único composto do produto; con todo, outras reaccións requiren poucos reactivos para obter múltiplos do produto final, por exemplo, a creación de auga. Comprender como crear e equilibrar correctamente as ecuacións químicas é imprescindible para que as e os científicos saiban que cantidade de produto se forma a partir de certos reactivos. Saber canto produto se forma a partir de certa cantidade de reactivos axuda ás científicas/os para determinar como certas reaccións están a contaminar o medio ambiente. Tamén permite verificar cantos reactantes deben estar presentes para formar o produto. Toda ecuación química equilibrada debe cumprir a Lei de Conservación da Materia. Esta lei establece que «non hai ningún cambio detectábel na cantidade total de materia presente cando a materia se converte dun tipo a outro ou cambia entre os estados sólido, líquido ou gaseoso», polo que debe haber o mesmo número de moléculas da mesma especie en ambos lados da ecuación. Isto conséguese sumando números enteiros de coeficientes a determinadas moléculas ou compostos. O octano, que se agrega á gasolina para mellorar o rendemento do motor, relaciónase cunha serie de consecuencias ambientais negativas desde o aumento das emisións de gases de efecto invernadoiro ata a contaminación do aire. A ecuación química para a combustión de octano C_8H_{18} co osíxeno dispoñible O_2 que produce enerxía, dióxido de carbono e auga é



1. Para equilibrar a ecuación química debemos atopar números enteiros positivos x, y, z, w tales que



Escribe un sistema de ecuacións que relacione os coeficientes desta ecuación química, de tal maneira que haxa o mesmo número de tipos de átomos en ambos lados.

2. Discute e resolve o sistema de ecuacións obtido. Escribe a ecuación química equilibrada.
3. Con cantos conxuntos diferentes de coeficientes pode equilibrarse esta reacción? É posíbel ter unha ecuación química que poida equilibrarse exactamente de dúas maneiras?
4. Sabendo que un litro de gasolina ten unha masa de 750 gr de octano. Calcula a cantidade de CO_2 producida por 10 litros de gasolina. (As masas moleculares do C , H e O son 12, 1 e 16 u, respectivamente).

Solución. (1) Igualando o número de átomos de carbono, hidróxeno e osíxeno en cada lado, obtense o sistema de ecuacións lineares homoxéneo con tres ecuacións e catro incógnitas:

$$\begin{cases} 8x - z = 0, \\ 18x - 2w = 0, \\ 2y - 2z - w = 0, \end{cases} \quad (7.31)$$

que podemos escribir en forma matricial mediante

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

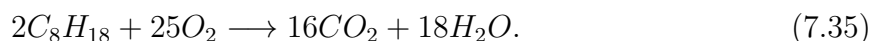
(2) Posto que o rango da matriz

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.33)$$

é 3, o sistema é compatíbel indeterminado. Facendo $w = t$, $t \in \mathbf{R}$, obtemos

$$x = \frac{1}{9}t, \quad z = \frac{8}{9}t, \quad 2y = \frac{16}{9}t + t = \frac{25}{9}t. \quad (7.34)$$

Pero como x , y , z e w deben ser enteiros positivos, eliximos $t = 18$, que é o menor valor que elimina todos os denominadores, e a reacción equilibrada é



(3) Un número infinito de conxuntos de coeficientes. Non é posíbel ter unha ecuación que poida equilibrarse exactamente de dúas formas. Todo sistema de ecuacións lineares con solución ten 0, 1 ou infinitas solucións. Os sistemas de ecuacións lineares que dan os coeficientes da ecuación química sempre teñen infinitas solucións.

(4) Partimos de que 1 mol de C_8H_{18} ten masa molar 114 gr e 1 mol de CO_2 ten 44 gr. Así, 10 l de gasolina, é dicir, 7,5 kg de C_8H_{18} , producirá $8 \times 44 \times 7,5 : 0,114 = 23,1589$ Kg de CO_2 . \square

Tarefa extra 7.1. Constrúe un texto sobre o «negacionismo climático» en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 7.2. O **Consortio de Compensación de Seguros** é unha sociedade participada polo Estado e polas compañías aseguradoras. Este consorcio, a través dun fondo, indemniza os afectados por catástrofes naturais, sempre e cando os bens estivesen asegurados previamente. O fondo nítrese dunha porcentaxe da prima que se paga en todos os seguros. Este tipo de protección é única na Unión Europea, e quizais por iso, mentres no resto da UE a porcentaxe de bens asegurados é dun 40%, en España alcanza o 70% segundo **UNESPA (Unión Española de Entidades Aseguradoras y de Reaseguros)**.

1. Se tomamos 1000 bens de distintos países da Unión Europea e resultan estar asegurados 420 deles, o intervalo de confianza para a porcentaxe de bens asegurados a partir dos datos da mostra estaría en consonancia coa introdución anterior cun nivel de confianza do 98%?
2. Se queremos reducir a amplitude do intervalo de confianza, que teriamos que facer?
3. Se mantemos a mesma mostra e obtemos que a porcentaxe de bens asegurados está entre 69% e 76%, con que nivel de confianza se obtivo o intervalo?

Solución. (1) Temos que a proporción na mostra é

$$\hat{p} = \frac{420}{1000} = 0,42. \quad (7.36)$$

Para que a área sexa 0,98, na distribución normal $N(0;1)$ temos que $z_{\alpha/2}=2,33$.

Se empregamos a fórmula do intervalo de confianza para a proporción,

$$\begin{aligned} \text{IC} &= \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) \\ &= \left(0,42 - 2,33 \sqrt{\frac{0,42 \cdot 0,58}{1000}}, 0,42 + 2,33 \sqrt{\frac{0,42 \cdot 0,58}{1000}} \right) = (0,38, 0,46), \quad (7.37) \end{aligned}$$

cun nivel de confianza do 98%, que está en consonancia con que na Unión Europea a proporción de bens asegurados está en torno ao 40%.

(2) Posto que o raio do intervalo é

$$z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \quad (7.38)$$

e xa que mantemos a mostra \hat{p} , o radio tamén permanece igual. Por tanto, a solución é aumentar o tamaño da mostra n ou ben diminuír o nivel de confianza $1 - \alpha$, xa que deste xeito diminúe $z_{\alpha/2}$.

(3) Neste caso temos que o intervalo de confianza vén dado de xeito explícito

$$\text{IC} = (0,69, 0,76), \quad (7.39)$$

de xeito que podemos calcular o seu raio mediante

$$r = \frac{0,76 - 0,69}{2} = 0,035. \quad (7.40)$$

Con estes valores podemos agora determinar o $z_{\alpha/2}$ correspondente desde

$$0,035 = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{0,42 \cdot 0,58}{1000}}, \quad (7.41)$$

que implica que

$$0,035 = z_{\alpha/2} 0,016 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,19. \quad (7.42)$$

Empregamos agora as táboas da distribución normal $N(0;1)$ para ter que

$$1 - 0,9857 = \alpha/2 \Rightarrow \alpha/2 = 0,0143. \quad (7.43)$$

Posto que

$$0,9857 - 0,0143 = 0,9714 \quad (7.44)$$

temos que o intervalo foi calculado cun nivel de confianza do 97,14%.

□

Tarefa extra 7.3. A chamada ecuación de difusión modeliza a expansión dun contaminante a partir dunha única emisión concentrada. Noutras palabras, vértese o contaminante no medio ambiente unha soa vez, e logo déixase que se difunda desde o punto de vertedura, sen engadir máis. Este modelo só é adecuado para a dispersión da contaminación en distancias moi curtas. En distancias máis longas hai que ter en conta as correntes de ar, e ar e auga. Se medimos a concentración, c , do contaminante no punto $x = a$, entón un bo modelo é

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right), \quad (7.45)$$

onde t é o tempo transcorrido.

1. Calcula a taxa de variación da función $c(t)$ cando $a = 5$.
2. Que acontece cando o tempo está cada vez máis próximo a cero? Depende de a o resultado? Explica por que isto ten sentido científico.
3. Acha o instante en que c atinxe o seu valor máximo.
4. Ezboza a gráfica que explica a evolución do contaminante.

Solución. (1) Calculamos a derivada da función $c(t)$

$$c'(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right) \left(\frac{a^2}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}} - \frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}\right) = \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right) \frac{a^2 - 2t}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}, \quad (7.46)$$

e procedemos a substituír a polo valor sinalado:

$$c'(t) = \exp\left(\frac{-25}{4t}\right) \frac{25 - 2t}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}. \quad (7.47)$$

(2) Podemos expresar a idea de tender o tempo a cero mediante o seguinte límite lateral (pois non ten ningún sentido que o tempo sexa negativo):

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} c(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right). \quad (7.48)$$

Expresado dese xeito, o primeiro factor tende a $+\infty$ mentres que o segundo factor tende á exponencial de menos infinito, é dicir, tende a cero. Polo tanto temos unha indeterminación da forma $\infty \cdot 0$. Se expresamos o límite destoutro xeito

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} c(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right)}{\sqrt{4\pi t}}, \quad (7.49)$$

temos que tanto numerador como denominador tenden a 0. Se aplicamos a regra de L'Hôpital resulta

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^2 \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right)}{4t^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^2 \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right)}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}, \quad (7.50)$$

que resulta novamente 0/0. No lugar de seguir aplicando a regra de L'Hôpital deste xeito pois o único que conseguimos é complicar cada vez máis o límite, optamos por expresalo doutro xeito:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right)}{\sqrt{4\pi t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/\sqrt{4\pi t}}{\exp\left(\frac{a^2}{4t}\right)} \quad (7.51)$$

que agora tende a infinito dividido por infinito. De aplicarmos agora a regra de 'Hôpital resulta

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right) \sqrt{t}}{\sqrt{\pi}a^2} = 0. \quad (7.52)$$

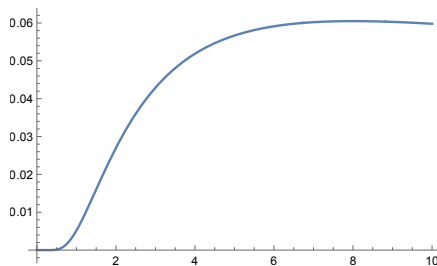
É dicir, o límite tende a cero para calquera valor de a . Isto significa que no momento inicial non hai contaminación, que é coherente co que se tenta modelar.

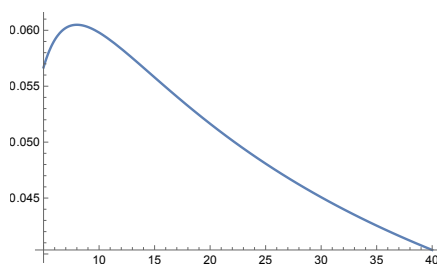
(3) Do obtido no apartado primeiro podemos determinar os posíbeis extremos relativos da función igualando a derivada primeira a cero:

$$c'(t) = \sqrt{4\pi t} \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right) \frac{a^2 - 2t}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}} = 0, \quad (7.53)$$

de onde resulta que o único candidato está en $t = a^2/2$. Analizando o signo da derivada primeira antes e despois dese instante de tempo obtemos que nese punto a función atinxe un máximo relativo. Logo de liberar o contaminante, temos que se difunde ata chegar ao instante de maior concentración. Ao non haber máis contaminante que no instante inicial, a medida que o tempo avanza logo de atinxir o máximo comeza a diminuír.

(4) Representamos a función para $a = 4$ en dous intervalos de tempo. Primeiro desde o tempo inicial ata $t = 10$ e no segundo gráfico desde $t = 5$ ata $t = 40$.





□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias.

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (*Influencers*) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.